AMALGAMASI
JOURNAL OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS
ISSN 2830-3695

Kekonvergenan Barisan di Ruang Bernorma-2 Berdasarkan Norma Ruang Kuosiennya

Sasnia Febriani Adjid[1*], Harmanus Batkunde[1], Abraham Zacharia Wattimena[1]
[1]Prodi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Pattimura
Email korespondensi: niafbrn@gmail.com

Abstrak
Konsep ruang bernorma-2 merupakan perumuman dari konsep ruang bernorma. Struktur dari ruang bernorma-2 telah banyak diteliti sejak dikenalkan oleh S. Gahler pada tahun 1964. Tujuan dari penelitian ini mengkaji kekonvergenan barisan di ruang bernorma-2 dengan memanfaatkan norma di ruang-ruang kuosiennya. Dua kelas yang berisi ruang-ruang kuosien akan dikonstruksi. Norma-norma di ruang kuosien pada tiap kelas ini akan menjadi pendekatan dalam mengkaji kekonvergenan barisan di ruang bernorma-2. Diperoleh bahwa kekonvergenan barisan ditinjau dengan menggunakan norma dari tiap kelas akan ekuivalen.
Kata kunci: kekonvergenan barisan, ruang bernorma-2, ruang kuosien

Sejarah artikel

Diterima: 25-04-2022
Direvisi: 20-05-2022
Dipublikasikan: 25-05-2022

Abstract
The concept of 2-normed spaces is a generalization of the concept of normed spaces. The structure of 2-normed spaces has been studied since S. Gahler introduced the concept on 1964. This study aims to investigate the convergence of sequences in 2-normed spaces using the norms on the quotient spaces. Two classes that contains quotient spaces will be constructed. Norms on each quotient spaces on each class will be a new viewpoint in observing the convergence of sequences in the 2-normed spaces. We found that when we observing the convergence of sequences using norms on quotient spaces in each class is equivalent.
Keywords: convergent sequence, 2-normed spaces, quotient spaced

Article history

Received: 2022-04-25
Revised: 2022-05-20
Published: 2022-05-25

A. Pendahuluan

S. Banach, H. Hahn dan N. Weiner merupakan ilmuan pertama yang mengemukakan konsep ruang bernorma pada tahun 1922, kemudian pada tahun 1932 teorinya dikembangkan oleh S.Banach. ruang bernorma adalah ruang-ruang yang dibangun dari ruang vector dengan mendefinisikan norma didalamnya. Ruang vektor X yang mempunya norma $\|\cdot\|$ yang dilambangkan dengan pasangan $(X, \|\cdot\|)$ disebut ruang bernorma (Kreyszig, 1978).

Konsep ruang bernorma-2 pertama kali diperkenalkan oleh S. Gähler pada tahun 1964 yang merupakan perumuman konsep ruang bernorma. Jika norma untuk mengukur panjang vektor, maka norma-2 untuk mengukur luas jajaran genjang yang direntang oleh dua vektor.

Sebelumya ruang bernorma-2 secara khusus, belum pernah dikaji dengan memanfaatkan ruang kuosien. Oleh karena itu, penelitian ini akan membahas ruang kuosien pada ruang bernorma-2 dan juga kekonvergenan barisan di ruang bernorma-2.

B. Metode Penelitian

Tipe penelitian yang dipakai pada penelitian ini adalah kajian pustaka yaitu mengumpulkan, mempelajari, dan menganalisa data ilmiah yang diperoleh dari bahan dan atau materi penelitian kemudian di pertanggungjawabkan secara ilmiah dalam bentuk tulisan ilmiah.

C. Hasil Dan Pembahasan

1. Ruang Kuosien di Ruang Bernorma-2

Misalkan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ adalah suatu ruang bernorma-2 dan $Y = \{y_1, y_2\}$ adalah suatu himpunan bebas linier di X. Tinjau himpunan

$$Y\backslash\{y_1\} = \{y_2\}$$

Kemudian definisikan subruang di X yang dibangun oleh $Y\backslash\{y_1\}$

$$\text{span } Y\backslash\{y_1\} = \{\alpha y_2, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Selanjutnya, untuk membuktikan bahwa $span\ Y\backslash\{y_1\} = \{\alpha y_2, \alpha \in \mathbb{R}\}$ adalah subruang, berarti $span\ Y\backslash\{y_1\}$ harus memenuhi sifat berikut:

1. $span\ Y\backslash\{y_1\} \subseteq X$
   Bukti:
   $Y = \{y_1, y_2\} \subset X$
   Karena X adalah ruang vektor, untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha y_2 \in X$
   sehingga $span\ Y\backslash\{y_1\} \subseteq X$
2. Untuk sebarang $u, w \in span\ Y\backslash\{y_1\}$, maka
   a. $u - w \in span\ Y\backslash\{y_1\}$
   b. $\gamma u \in span\ Y\backslash\{y_1\}, \alpha \in \mathbb{R}$
   Bukti:

a. Ambil sebarang $u, w \in span\ Y\backslash\{y_1\}$, maka
$u = \alpha_1 y_2\ , w = \alpha_2 y_2\ ; \alpha_1, \alpha_2\ \in\ \mathbb{R}$
$u - w =\ \alpha_1 y_2 - \alpha_2 y_2$
$= \alpha_3 y_2\ ;\ \alpha_3 = (\alpha_1 - \alpha_2) \in\ \mathbb{R}$
sehingga $u - w \in span\ Y\backslash\{y_1\}$

b. Ambil sebarang $\gamma \in \mathbb{R}$ dan $u \in span\ Y\backslash\{y_1\}$, maka $u = \alpha_1 y_2$
$\gamma u =\ \gamma \cdot \alpha_1 y_2$
$= \alpha_4 y_2\ ;\ \ \alpha_4 =\ \gamma\alpha_1 \in\ \mathbb{R}$
sehingga $\gamma u \in span\ Y\backslash\{y_1\}$

Untuk sebarang u ∈ X kelas ekuivalen atau koset yang berkorespondensi dengan u di X terhadap Y_1 adalah :

$$\bar{u} = \{u +\ \alpha y_2;\ \ u \in X\ dan\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Dengan demikian diperoleh :

1. $\bar{0} = span\ \ Y\backslash\{y_1\}$
2. Misalkan $u, w\ \ \in X, \bar{u} =\ \bar{w}$ jika dan hanya jika $u - w\ \ \in Y_1$

bentuk ruang kuosien $X_1^* = X\backslash Y_1 = \{\bar{u}\ ; u\ \epsilon\ \mathbb{R}\}$
Pada ruang kuosien X_1^* definisikan suatu fungsi $\|\cdot\|_1^* : X_1^* \to \mathbb{R}$ oleh

$$\|\bar{u}\| \coloneqq\ \ \|u, y_2\| \qquad (1)$$

Teorema 1.1. Jika $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ adalah suatu ruang bernorma-2, maka $(X_1^*, \|\cdot\|_1^*)$ adalah suatu ruang bernorma.

Bukti. Cukup dibuktikan bahwa fungsi yang didefinisikan pada persamaan (1) merupakan suatu norma. Misal $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ adalah suatu ruang bernorma-n dan $Y\ =\ \{y_1, y_2\}$ adalah suatu himpunan bebas linear di X.

i. $\|\bar{u}\| \geq 0$, jika dan hanya jika $\bar{u} = 0$
Jika $\bar{u} = 0$ maka $\|u, y_2\| = 0$
Karena y_2 adalah vektor bebas linier maka diperoleh
$u = \alpha y_2;\ \ \alpha\ \epsilon\ \mathbb{R}$
Dengan demikian $u\ \ \in Y_1$, maka
$\|\bar{u}\| = \|\bar{0}\| = \|0, y_2\| = 0$

ii. $\|\alpha\bar{u}\| = |\alpha|\|\bar{u}\|$
$\|\alpha\bar{u}\| = \|\alpha u, y_2\|$
$= |\alpha|\|u, y_2\|$
$= |\alpha|\|\bar{u}\|.$

iii. $\|\bar{u} + \bar{w}\| \leq \|\bar{u}\| + \|\bar{w}\|$
Misal $\bar{u}, \bar{w}\ \epsilon\ X_1^*$, maka
$\|\bar{u} + \bar{w}\| = \|u + w, y_2\|$
$\leq\ \ \|u, y_2\| + \|w, y_2\|$
$= \|\bar{u}\| + \|\bar{w}\|.$

Dengan demikian $\|\cdot\|_1^*$ adalah suatu norma di X_1^* dan $(X_1^*, \|\cdot\|_1^*)$ adalah suatu ruang bernorma.

□

Selanjutnya, tinjau pula himpunan

$$Y\backslash\{y_2\} = \{y_1\}$$

Kemudian kita definisikan subruang di X yang dibangun oleh $Y\backslash\{y_2\}$.

$$\text{span } Y\backslash\{y_2\} = \{\beta y_1, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Selanjutnya, dapat diselidiki bahwa span $Y\backslash\{y_2\} = \{\beta y_1, \beta \in \mathbb{R}\}$ adalah subruang.

Untuk sebarang $v \in X$ kelas ekuivalen atau koset yang berkorespondensi dengan v di X terhadap Y_2 adalah :

$$\bar{v} = \{v + \ \beta y_1 \ , v \in X \ dan \ \ \beta \in \mathbb{R}\}$$

Dengan demikian diperoleh :

1. $\bar{0} = span \ \ Y\backslash\{y_1\}$.
2. Misalkan $v, t \ \in X, \bar{v} = \ \bar{t}$ jika dan hanya jika $v - t \ \in Y_2$.

Lebih lanjut kita definisikan ruang kuosien dari X sebagai berikut.

$$X_1^* = X/Y_1 = \{\bar{u} : u \in X\}$$

Untuk sebarang $\bar{u}, \bar{w} \in X_1^*$dan $\alpha \in \mathbb{R}$, berlaku :

1. $\bar{u} + \bar{w} = \overline{u + w}$,
2. $\alpha\bar{u} = \overline{\alpha u}$.

dan

$$X_2^* = X/Y_2 = \{\bar{v} : v \in X\}$$

Untuk sebarang $\bar{v}, \bar{t} \in X_1^*$ dan $\beta \in \mathbb{R}$, berlaku :

1. $\bar{v} + \bar{t} = \overline{v + t}$,
2. $\beta\bar{v} = \overline{\beta v}$.

Pada ruang kuosien X_2^* didefinisikan suatu fungsi $\|\cdot\|_2^* : X_2^* \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh

$$\|\bar{v}\| \coloneqq \ \|v, y_1\| \qquad (2)$$

Kedua fungsi tersebut terdefinisi dengan baik. Lebih lanjut, fungsi tersebut merupakan suatu norma di $X_j^* (j = 1,2)$ seperti ditunjukkan oleh teorema berikut.

Teorema 1.2. Jika $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ adalah suatu ruang bernorma-2, maka $(X_2^*, \|\cdot\|_2^*)$ adalah suatu ruang bernorma.

Bukti. Cukup dibuktikan bahwa fungsi yang didefinisikan pada persamaan (2) merupakan suatu norma. Misal $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ adalah suatu ruang bernorma-n dan $Y = \{y_1, y_2\}$ adalah suatu himpunan bebas linear di X.

i. $\|\bar{v}\| \geq 0$, jika dan hanya jika $\bar{v} = 0$
   Jika $\bar{v} = 0$ maka $\|v, y_1\| = 0$
   Karena y_1 adalah vektor bebas linier maka diperoleh
   $v = \beta y_1; \ \alpha \ \epsilon \ \mathbb{R}$
   Dengan demikian $v \in Y_2$, maka
   $\|\bar{v}\| = \|\bar{0}\| = \|0, y_1\| = 0$
ii. $\|\beta\bar{v}\| = |\beta|\|\bar{v}\|$
   $\|\beta\bar{v}\| = \|\beta v, y_1\|$
   $\qquad = |\beta|\|v, y_1\|$
   $\qquad = |\beta|\|\bar{v}\|$
iii. $\|\bar{v} + \bar{t}\| \leq \|\bar{v}\| + \|\bar{t}\|$
   Misal $\bar{u}, \bar{w} \ \epsilon \ X_2^*$, maka
   $\|\bar{v} + \bar{t}\| = \|v + t, y_1\|$

Amalgamasi : Journal of Mathematics and Applications
Vol. 1, No. 1, May, 2022
ISSN: 2830-3695

$$\leq \|v, y_1\| + \|t, y_1\|$$
$$= \|\bar{v}\| + \|\bar{t}\|$$

Dengan demikian $\|\cdot\|_2^*$ adalah suatu norma di X_2^* dan $(X_2^*, \|\cdot\|_2^*)$ adalah suatu ruang bernorma.

□

Dengan menggunakan konstruksi ruang kuosien di atas, sehingga dapat membentuk 2 buah ruang kuosien dari suatu ruang bernorma-2. Masing-masing ruang kuosien berbeda, namun memiliki struktur yang sama. Selanjutnya kumpulkan ruang-ruang kuosien dengan konstruksi yang sejenis dalam suatu himpunan dan namakan **koleksi kelas-1.** Lebih lanjut, dapat dilihat bahwa pada konstruksi ruang-ruang kuosien di atas dilakukan dengan meninjau himpunan yang berisi 2 vektor bebas linear dengan 'menghilangkan' satu vektor sebarang dari Y.
Selanjutnya, konstruksi ruang-ruang kuosien akan dilakukan dengan meninjau himpunan koleksi kelas-2 vektor bebas linear dan 'menghilangkan' 2 buah vektor bebas linear dari Y.

Misalkan $\{X, \|\cdot,\cdot\|\}$ adalah suatu ruang bernorma-2 dan $Y = \{y_1, y_2\}$ adalah suatu himpunan bebas linier di X. Tinjau himpunan

$$Y_{1,2} = Y \setminus \{y_1, y_2\} = \{\ \}$$

Kemudian kita definisikan subruang di X yang dibangun oleh $Y \setminus \{y_1, y_2\}$

$$Y_{1,2} := \text{span } Y \setminus \{y_1, y_2\} = \{\ \}$$

Untuk sebarang $u \in X$ kelas ekuivalen atau koset yang berkorespondensi dengan u di X terhadap $Y_{1,2}$ adalah :

$\bar{u} = \{u + \text{span } Y \setminus \{y_1, y_2\}\} = \{u\}.$

Dengan demikian diperoleh :

1. $\bar{0} = \{0\}$.
2. Misalkan $u, v \in X, \bar{u} = \bar{v}$ jika dan hanya jika $u - v \in 0$ sehingga dapat ditulis $u = v$.

Selanjutnya, definisikan ruang kuosien di X sebagai

$$X_{1,2}^* = X / Y_{1,2} = \{\bar{u} : u \in X\} = X$$

Sehingga untuk sebarang $\bar{u}, \bar{v} \in X_{1,2}^*$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, berlaku :

1. $\bar{u} + \bar{v} = \overline{u + v}$,
2. $\alpha\bar{u} = \overline{\alpha u}$.

Definisikan suatu fungsi $\|\cdot\|_{1,2}^* : X_{1,2}^* \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh

$$\|\bar{u}\|_{1,2}^* \coloneqq \|u_1, y_1\| + \|u_2, y_2\| \quad (3)$$

Misalkan $u_1, u_2 \in X_{1,2}^*$ dan $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$, dapat ditulis $u_1 - u_2 \in \mathit{span}\ Y_{1,2}^*$. Dengan demikian, terdapat $\alpha_{1,2} \in \mathbb{R}$, sehingga

$$u_1 - u_2 \in \{0\}$$
$$u_1 - u_2 = 0$$
$$u_1 = u_2$$

Oleh karena itu

$$\|\bar{u}_1\|_{1,2}^* = \|\overline{u_2}\|_{1,2}^*$$

Fungsi ini terdefinisi dengan baik. Lebih lanjut fungsi ini merupakan suatu norma di $X_{1,2}^*$.

Teorema 1.3. Jika $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ adalah suatu ruang bernorma-2 dan $\|\cdot\|_{1,2}^{*}$ adalah norma yang didefinisikan pada (3), maka $(X_{1,2}^{*},\|\cdot\|_{1,2}^{*})$ adalah suatu ruang bernorma.

Bukti. Cukup buktikan bahwa fungsi yang didefinisikan pada persamaan (3) merupakan suatu norma. Misalkan$(X,\|\cdot,\cdot\|)$ adalah suatu ruang bernorma-2 dan $Y=\{y_1,y_2\}$ adalah suatu himpunan bebas linier di X.

i. $\|\bar{u}\| = \|u,y_1\| + \|u,y_2\| \geq 0$
Jika $\bar{u}=\bar{0}$ maka $\|u,y_1\|+\|u,y_2\| = \|0,y_1\|+\|0,y_2\| = 0$. Sebaliknya jika $\bar{u}=\bar{0}$ maka $\|u,y_1\|+\|u,y_2\|=0$. Dengan demikian,
Karena $\|u,y_1\|,\|u,y_2\| \geq 0$ maka $\|u,y_1\| = \|u,y_2\| = 0$, akibatnya u tidak bebas linier terhadap y_1 dan y_2 maka diperoleh
$u = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2;\ \alpha \in \mathbb{R}$
Karena $Y=\{y_1,y_2\}$ himpunan bebas linier di X, akibatnya $u=0$
$\|u\| = \|0\| = \|0,y_1\| + \|0,y_2\| = 0$

ii. $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$
$$\begin{aligned}\|\alpha u\| &= \|\alpha u,y_1\| + \|\alpha u,y_2\|\\ &= |\alpha|\|u,y_1\| + \|u,y_2\|\\ &= |\alpha|\|u\|\end{aligned}$$

iii. $\|u+w\| \leq \|u\| + \|w\|$
Misal $u,w\ \in X_{1,2}^{*}$, maka
$$\begin{aligned}\|u+w\| &= \|u+w,y_1\| + \|u+w,y_2\|\\ &\leq \|u,y_1\| + \|u,y_2\| + \|w,y_1\| + \|w,y_2\|\\ &= \|u\| + \|w\|\end{aligned}$$

Dengan demikian maka $\|\cdot\|_{1,2}^{*}$ adalah suatu norma di $X_{1,2}^{*}$ dan $(X_{1,2}^{*},\|\cdot\|_{1,2}^{*})$ adalah suatu ruang bernorma. □

Dari konstruksi tersebut, diperoleh 1 buah ruang kuosien yang dapat dibentuk yaitu X. Kita kumpulkan ruang kuosien ini dalam satu himpunan dan namakan **koleksi kelas-2.**

Perhatikan bahwa saat meninjau koleksi kelas-2, maka 'ruang kuosien' yang ditinjau adalah X sendiri. Dengan kata lain saat meninjau koleksi kelas 2 berarti yang ditinjau adalah X sebagai suatu ruang bernorma (normanya didefinisikan dengan memanfaatkan norma-2 yang ada di X). Koleksi kelas-2 hanya berisi 1 'ruang kuosien' dan

$$\|x\| = \|x,y_1\| + \|x,y_2\| = \|\bar{x}\|_1^{*} + \|\bar{x}\|_2^{*}; \qquad x \in X$$

adalah norma di X.

2. Kekonvergenan Di Ruang Bernorma-2

Definisi 2.1 Misalkan $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ adalah ruang bernorma-2, suatu barisan $(x_n) \subset X$ dikatakan konvergen ke x. Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n \geq N$ berlaku

$$\|x_n - x, z\| < \varepsilon, \qquad \text{untuk setiap } z \in X$$

atau dapat ditulis

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, z\| = 0, \qquad \text{untuk setiap } z \in X$$

Gunawan dkk telah menunjukkan bahwa untuk meninjau sifat-sifat di ruang bernorma-n ($n \geq 2$) cukup menggunakan 2 buah vektor uji di ruang tersebut, dengan mendefinisikan suatu norm yang diturunkan dari norma-n yang sudah ada (Gunawan & Mashadi, On n-Normed Spaces, 2000). Dengan demikian pada bagian selanjutnya kita akan meninjau kekonvergenan di ruang bernorma-2 dengan memanfaatkan suatu himpunan bebas linear yang berisi 2 buah vektor.

3. Kekonvergenan Barisan di Ruang Bernorma-2 Terhadap Norma-Norma Koleksi Kelas-1

Definisi 3.1 Misalkan $(X, \|.,.\|)$ adalah ruang bernorma-2 dan $Y = \{y_1, y_2\}$ adalah himpunan bebas linear di X. Suatu barisan (x_n) konvergen ke x terhadap norma-norma koleksi kelas-1 jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $\mathrm{n} \geq \mathrm{N}$ berlaku

$$\|\mathrm{x_n} - \mathrm{x}, \mathrm{y_1}\| < \varepsilon$$

dan

$$\|\mathrm{x_n} - \mathrm{x}, \mathrm{y_2}\| < \varepsilon$$

atau dapat ditulis

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathrm{x_n} - \mathrm{x}, \mathrm{y_1}\| = 0$$

dan

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathrm{x_n} - \mathrm{x}, \mathrm{y_2}\| = 0.$$

Selanjutnya dinotasikan dengan $x_n \underset{1}{\rightarrow} x$.

Teorema 4.4.2 Misalkan $(X, \|.,.\|)$ adalah ruang bernorma-2, maka berlaku

1. Jika $x_n \underset{1}{\rightarrow} x$ dan $y_n \underset{1}{\rightarrow} y$ untuk $n \rightarrow \infty$, maka $x_n + y_n \underset{1}{\rightarrow} \quad x + y$ untuk $\mathrm{n} \rightarrow \infty$.
2. Jika $x_n \underset{1}{\rightarrow} x$ dan $\alpha_n \rightarrow \alpha$ untuk $n \rightarrow \infty$, maka $\alpha_n x_n \underset{1}{\rightarrow} \alpha x$ untuk $\mathrm{n} \rightarrow \infty$; $\alpha, \alpha_\mathrm{n} \in \mathbb{R}$.
3. Jika $x_n \underset{1}{\rightarrow} x$ dan $x_n \underset{1}{\rightarrow} x$ untuk $n \rightarrow \infty$, maka $x = y$.

Bukti.

1. Misal $x_n \underset{1}{\rightarrow} x$, $y_n \underset{1}{\rightarrow} y$, dengan demikian untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $n \geq N_1$, maka

$$\|x_n - x, y_1\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan

$$\|x_n - x, y_2\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Selanjutnya terdapat $N_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $n \geq N_2$ berlaku

$$\|y_n - y, y_1\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan

$$\|y_n - y, y_2\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Pilih $N = maks\,\{N_1, N_2\}$ maka untuk $n \geq N$ berlaku

$$\begin{aligned}\|(x_n + y_n) - (x + y), y_1\| &\leq \|x_n - x, y_1\| + \|y_n - y, y_1\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\|(x_n + y_n) - (x + y), y_2\| &\leq \|x_n - x, y_2\| + \|y_n - y, y_2\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

$$= \varepsilon.$$

Dengan kata lain $x_n + y_n \underset{1}{\rightarrow} x + y$.

2. Misal $x_n \underset{1}{\rightarrow} x$ dan $\alpha_n \rightarrow \alpha$; $\alpha_n, \alpha \in \mathbb{R}$.
Dengan demikian untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $n \geq N_1$, berlaku
$$\|x_n - x, y_i\| < \frac{\varepsilon}{2K}; \text{untuk setiap } i \in \{1,2\}.$$
Selanjutnya terdapat $N_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $n > N_2$ berlaku
$$|\alpha_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2M} \ ; \ \ M = maks\ \|x, y_i\| \ ; \ i \in \{1,2\}.$$
Pilih $N = maks\ \{N_1, N_2\}$ sehingga untuk $n \geq N$ dan untuk $i \in \{1,2\}$ berlaku
$$\begin{aligned}\|\alpha_n x_n - \alpha x, y_i\| &= \|\alpha_n x_n - \alpha_n x + \alpha_n x - \alpha x, y_i\| \\ &\leq \|\alpha_n x_n - \alpha_n x, y_i\| + \|\alpha_n x - \alpha x, y_i\| \\ &= |\alpha_n|\|x_n - x, y_i\| + |\alpha_n - \alpha|\|x, y_i\| \\ &< K\|x_n - x, y_i\| + |\alpha_n - \alpha|\|x, y_i\|,\end{aligned}$$
dengan $K = maks\ \{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{n-1}|, |\alpha_N|, |\alpha| + 1\}$
Sehingga diperoleh:
$$\begin{aligned}\|\alpha_n x_n - \alpha x, y_i\| &< K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$
Karena berlaku untuk $i \in \{1,2\}$, maka $\alpha_n x_n \underset{1}{\rightarrow} \alpha x$.

3. Misal $x_n \underset{1}{\rightarrow} x$ dan $x_n \underset{1}{\rightarrow} y$.
Maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $n \geq N_1$, berlaku
$$\|x_n - x, y_i\| < \frac{\varepsilon}{2} \ ; \ \text{untuk } i \in \{1,2\}$$
Terdapat $N_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $n \geq N_2$, berlaku
$$\|x_n - x, y_i\| < \frac{\varepsilon}{2} \ ; \text{untuk } i \in \{1,2\}$$
pilih $N = maks\ \{N_1, N_2\}$, sehingga untuk $n \geq N$ berlaku
$$\begin{aligned}\|x - y, y_i\| &= \|x - x_n + x_n - y, y_i\| \\ &\leq \|x - x_n, y_i\| + \|x_n - y, y_i\| \\ &= \|x_n - x, y_i\| + \|x_n - y, y_i\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$
Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka $\|x - y, y_i\| = 0$, untuk setiap $i \in \{1,2\}$ yang berakibat $x - y = 0$ atau $x = y$. □

4. Kekonvergean Barisan di Ruang Bernorma-2 Terhadap Norma-Norma Koleksi Kelas-2

Definisi 4.1 Misalkan $(\boldsymbol{X}, \|.,.\|)$ adalah ruang bernorma-2 dan $\boldsymbol{Y} = \{\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}\}$ adalah himpunan bebas linear di $\boldsymbol{X}$. Suatu barisan $(\boldsymbol{x_n})$ konvergen ke $\boldsymbol{x}$ terhadap norma-norma koleksi kelas-2 jika untuk setiap $\boldsymbol{\varepsilon} > \boldsymbol{0}$ terdapat $\boldsymbol{N} \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{N}$ berlaku
$$\|x_n - x, y_1\| + \|x_n - x, y_2\| < \varepsilon$$

atau dapat ditulis

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, y_1\| + \|x_n - x, y_2\| = 0$$

Selanjutnya dinotasikam dengan $x_n \underset{2}{\to} x$.

Teorema 4.2 Misalkan $(X, \|.,.\|)$ adalah ruang bernorma-2 dan $Y = \{y_1, y_2\}$ adalaah himpunan bebas linier di X, maka berlaku

1. Jika $x_n \underset{2}{\to} x$ dan $y_n \underset{2}{\to} y$ untuk $n \to \infty$, maka $x_n + y_n \underset{2}{\to} x + y$ untuk $n \to \infty$.
2. Jika $x_n \underset{2}{\to} x$ dan $\alpha_n \to \alpha$ untuk $n \to \infty$, maka $\alpha_n x_n \underset{2}{\to} \alpha x$ untuk $n \to \infty$; $\alpha, \alpha_n \in \mathbb{R}$.
3. Jika $x_n \underset{2}{\to} x$ dan $x_n \underset{2}{\to} y$ untuk $n \to \infty$, maka $x = y$.

Bukti. Misal $(x_n), (y_n) \subseteq X$.

1. Misal $x_n \underset{2}{\to} x$, $y_n \underset{2}{\to} x$, dengan demikian untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $n \geq N_1$, maka

$$\|x_n - x, y_1\| + \|x_n - x, y_2\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan terdapat $N_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $n \geq N_2$ berlaku

$$\|y_n - x, y_1\| + \|y_n - x, y_2\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pilih $N = maks\ \{N_1, N_2\}$ maka untuk $n \geq N$ berlaku

$$\begin{aligned}\|(x_n + y_n) - (x + y), y_1\| + \|(x_n + y_n) - (x + y), y_1\| &\leq \|x_n - x, y_1\| + \|y_n - y, y_1\| + \|x_n - x, y_2\| + \|y_n - y, y_2\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Dengan kata lain $x_n + y_n \underset{2}{\to} x + y$.

2. Misal $x_n \underset{2}{\to} x$ dan $\alpha_n \to \alpha$; $\alpha_n, \alpha \in \mathbb{R}$.

Dengan demikian untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $n \geq N_1$, berlaku

$$\|x_n - x, y_1\| + \|x_n - x, y_2\| < \frac{\varepsilon}{K}$$

Dan terdapat $N_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $n > N_2$ berlaku

$$|\alpha_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{M}\ ;\quad M = maks\ \|x, y_1\| + \|x, y_2\|$$

Pilih $N = maks\ \{N_1, N_2\}$ sehingga untuk $n \geq N$ berlaku

$$\begin{aligned}\|\alpha_n x_n - \alpha x, y_1\| + \|\alpha_n x_n - \alpha x, y_2\| &= \|\alpha_n x_n - \alpha_n x + \alpha_n x - \alpha x, y_1\| + \|\alpha_n x_n - \alpha_n x + \alpha_n x - \alpha x, y_2\| \\ &\leq \|\alpha_n x_n - \alpha_n x, y_1\| + \|\alpha_n x - \alpha x, y_1\| + \|\alpha_n x_n - \alpha_n x, y_2\| + \|\alpha_n x - \alpha x, y_2\| \\ &= |\alpha_n|\|x_n - x, y_1\| + |\alpha_n - \alpha|\|x, y_1\| + |\alpha_n|\|x_n - x, y_2\| + |\alpha_n - \alpha|\|x, y_2\| \\ &< K\|x_n - x, y_1\| + |\alpha_n - \alpha|\|x, y_1\| + K\|x_n - x, y_2\| + |\alpha_n - \alpha|\|x, y_2\| \\ &< K(\|x_n - x, y_1\| + \|x_n - x, y_2\|) + |\alpha_n - \alpha|\|x, y_1\| + \|x, y_2\|\end{aligned}$$

dengan $K = maks\ \{|\alpha_1|, |\alpha_1|, \dots, |\alpha_{n-1}|, |\alpha_n| + 1\}$.

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\|\alpha_n x_n - \alpha x, y_1\| + \|\alpha_n x_n - \alpha x, y_1\| &< K \cdot \frac{\varepsilon}{2k} + \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Maka dengan kata lain $\alpha_n x_n \underset{1}{\rightarrow} \alpha x$.

3. Misal $x_n \underset{2}{\rightarrow} x$ dan $x_n \underset{2}{\rightarrow} y$.

Maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $n \geq N_1$, berlaku

$$\|x_n - x, y_1\| + \|x_n - x, y_2\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Terdapat $N_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $n \geq N_2$, berlaku

$$\|x_n - y, y_1\| + \|x_n - y, y_2\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Pilih $N = maks\ \{N_1, N_2\}$, sehingga untuk $n \geq N$ berlaku

$$\begin{aligned}\|x - y, y_1\| + \|x - y, y_2\| &= \|x - x_n + x_n - y, y_1\| + \|x - x_n + x_n - y, y_2\| \\ &\leq \|x - x_n, y_1\| + \|x_n - y, y_1\| + \|x - x_n, y_2\| + \|x_n - y, y_2\| \\ &= \|x_n - x, y_1\| + \|x_n - x, y_2\| + \|x_n - y, y_1\| + \|x_n - y, y_2\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka $\|x - y, y_1\| + \|x - y, y_2\| = 0$. Dengan demikian, karena $\|x - y, y_1\|, \|x - y, y_2\| \geq 0$ maka
$\|x - y, y_1\| = \|x - y, y_2\| = 0$ akibatnya $x - y$ tidak bebas linier terhadap y_1 dan y_2 maka diperoleh $x - y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2;\ \ \alpha \in \mathbb{R}$
Karena $Y = \{y_1, y_2\}$ himpunan bebas linier di X, akibatnya $x - y = 0$ atau $x = y$. ☐

Teorema 4.5 Misalkan $(X, \|.,.\|)$ adalah ruang bernorma-2 dan $Y = \{y_1, y_2\}$ adalah himpunan bebas linear. Barisan (x_n) kovergen terhadap norma koleksi kelas-1 jika dan hanya jika (x_n) konvergen terhadap norma koleksi kelas-2.

Bukti. Misalkan $(X, \|.,.\|)$ adalah ruang bernorma-2 dan $Y = \{y_1, y_2\}$. Jika $(x_n) \subset X$ dan konvergen terhadap norma koleksi kelas-1 ke x maka kita peroleh untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $n \geq N$ berlaku.

$$\|x_n - x, y_1\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dan} \|x_n - x, y_2\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

atau dapat ditulis

$$\begin{aligned}\|x_n - x, y_1\| + \|x_n - x, y_2\| &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Berdasarkan definisi maka (x_n) konvergen terhadap norma koleksi kelas-2 ke x.
Sebaliknya, jika (x_n) konvergen terhadap norma koleksi kelas-2 ke x untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $n \geq N$ berlaku.

$$\|x_n - x, y_1\| + \|x_n - x, y_2\| < \varepsilon.$$

Karena tiap suku pada ruas kiri tak negatif maka masing-masing kurang dari nilai ε atau dapat ditulis

$$\|x_n - x, y_1\| < \varepsilon$$

dan

$$\|x_n - x, y_2\| < \varepsilon$$

Berdasarkan definisi maka (x_n) konvergen terhadap koleksi kelas-1 ke x. □

Teorema 4.5 menjelaskan bahwa kekonvergenan terhadap norma-norma koleksi kelas-1 dan kelas-2 ekuivalen. Sehingga untuk meninjau kekonvergenan di ruang bernorma-2 kita dapat menggunakan salah satu dari koleksi-koleksi kelas di atas.

D. Simpulan

Dari hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa:

1. Ruang kuosien dari ruang bernorma-2 merupakan ruang bernorma. Norma tersebut diturunkan dari norma-2 yang ada.
2. Barisan konvergen dapat ditinjau dengan memanfaatkan norma-norma di koleksi kelas-1 maupun koleksi kelas-2. Teorema 4.5 menjamin bahwa kekonvergenan barisan ditinjau dengan norma di tiap kelas adalah ekuivalen, sehingga baik menggunakan koleksi kelas-1 ataupun koleksi kelas-2 hasilnya akan sama.

E. Daftar Pustaka

Arifin, R. F. (2017). Ruang Kuosien Di Ruang Bernorm-N Dan Topologinya. *Perpustakaan Digital ITB* .

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2010). *Introduction to Real Analysis.* (S. Corliss, Ed.) Laurie Rosatone.

Batkunde, H. (2021). Norms on Quotient Spaces of The 2-Inner Product Space. *Algebra and Analysis Division, Department of Mathematics, Pattimura University*, . 80-87.

Batkunde, H., & Gunawan, H. (2019). Bounded Linear Functional on n-Normed Spaces Through its Quotient Spaces. *To appear on International journal of applied physics and Mathematics* .

Diana, W. (2011). Kekonvergenan Pada Ruang Bernorma dan Ruang Hasil Kali Dalam.

Faisal, M. J. (2015). Kelengkapan Ruang C[a,b] Pada Ruang Norm-2. *Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi, 11*.

Freese, R. W., & Cho, Y. J. (2001). *Geometry Of Linear 2-Normed Spaced.* New York: Nova Science Publisher.

Gahler, S. (1964). Lineare 2-normierte Raume. In *Mathematische Nachrichten* (1-43).

Gozali, S. M. (2010). *Pengantar Analisis Fungsional.* Bandung.

Gunawan, H. (2018). *Norma di Ruang Bernorma-2*. Retrieved 6 6, 2021, from Bermatematika: *https://bermatematika.net/2018/10/02/norma-di-ruang-bernorma-2/*

Gunawan, H. (2018). *Ruang Bernorma-2*. Retrieved Juni 6, 2021, from Bermatematika: *https://bermatematika.net/2018/09/18/ruang-bernorma-2/*

Gunawan, H., & Mashadi, M. (2000). On n-Normed Spaces. *631-639*.

Malik, D. S., Mordeson, J. N., & Sen, M. K. (2007). Introduction to Abstract Algebra. United States: Scientific Word.

Manuhutu, J. (2014). Ruang Hasil Kali Dalam di Ruang Bernorma-2.