AMALGAMASI
JOURNAL OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS
ISSN 2830-3695

DIMENSI METRIK PADA GRAF HASIL KALI SISIR PADA GRAF LINTASAN TERHADAP BEBERAPA GRAF REGULER

Widya Apriliya Padoma[1], Anuwar Kadir Abdul Gafur[2*]
[1,2] Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Pasifik Morotai
Email korespondensi*: anuwarkadir657@gmail.com

Abstrak

Misalkan G adalah suatu graf terhubung, sederhana, dan berhingga. Misalkan himpunan $W = \{w_1, \cdots, w_k\}$ merupakan subhimpunan dari $V(G)$. Untuk setiap titik $v \in V(G)$, representasi titik v terhadap W didefenisikan k-tuple $r(v|W) = \big(d(v, w_1), \cdots, d(v, w_k)\big)$. Himpunan W disebut himpunan pembeda dari G jika setia dua titik $u, v \in V(G)$ berbeda memenuhi $r(u|W) \neq r(v|W)$. Sebuah basis dari G adalah kardinalitas minimum dari himpunan pembeda. Basis dari G disebut dimensi metrik di G yang dinotasikan $\beta(G)$. Dalam penelitian ini, Suhadi W Saputro dkk telah menemukan dimensi metrik dari graf hasil kali sisir yaitu $\beta(G \rhd_{\boldsymbol{o}} H) = m(\beta(H) - 1)$ jika H daun atau $\beta(G \rhd_{\boldsymbol{o}} H) = m \cdot \beta(H)$ jika bukan daun. Oleh karena itu, kami akan mencari dimensi metrik dari hasil kali sisir pada graf lintasan terhadap beberapa graf reguler dan kami telah berhasil menemukan jika titik salinan o di $V(H)$. Untuk $m \geq 3$, misalkan P_m adalah graf lintasan dan H adalah graf $(n-2) - reguler$ atau $(n-3) - reguler$. Maka $\beta(P_m \rhd_o H) = m \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right)$ untuk $n \geq 4$ atau $\beta(P_m \rhd_o H) = m \cdot \left(\frac{2n-7}{5}\right)$ untuk $n \geq 6$.

Kata kunci: *Himpunan Pembeda, Dimensi Metrik, Graf Reguler, Graf Lintasan, Hasil Kali Sisir.*

Sejarah artikel

Diterima: 12-03-2025
Direvisi: 18-05-2025
Dipublikasikan: 30-05-2025

Abstract

Let G be a graphs finite, simple, and connected. A set of vertices $W = \{w_1, \cdots, w_k\}$ subset of $V(G)$. For $v \in V(G)$, a representation of v with respect to W is defined as k-tuple $r(v|W) = \big(d(v, w_1), \cdots, d(v, w_k)\big)$. The set W is a resolving set of G if ever two distinct vertices $u, v \in V(G)$ satisfy $r(u|W) \neq r(v|W)$. A basis of G is a resolving set of G with minimum cardinality, and the metric dimension of G refers to its cardinality, denoted by $\beta(G)$. In this research, Suhadi W Saputro et al have found the metric dimension of the comb product graph $\beta(G \rhd_{\boldsymbol{o}} H) = m(\beta(H) - 1)$ if H leaf or $\beta(G \rhd_{\boldsymbol{o}} H) = m \cdot \beta(H)$ jika not a leaf. Therefore, we will be looking for the metric dimension of the product of a comb on a path graph to some regular graph and we have managed to find if the copy vertices of $V(G)$. For $m \geq 3$, let P_m is a path end H is $(n-2)$-regular or H is $(n-3)$-regular. Then $\beta(P_m \rhd_o H) = m \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right)$for $n \geq 4$ or $\beta(P_m \rhd_o H) = m \cdot \left(\frac{2n-7}{5}\right)$ for $n \geq 6$.

Keywords*: metric dimension, resolving set, regular graph, path graph, the comb product graph*

Article history

Received: 12-03-2025
Revised: 18-05-2025
Published: 30-05-2025

A. Pendahuluan

Graf merupakan suatu konsep yang terdiri atas dua bagian utama yaitu titik (vertex) dan sisi (edge). Sebuah graf G memiliki himpunan tak kosong titik yang dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi yang dinotasikan dengan $E(G)$. Setiap sisi dari suatu graf menghubungkan paling banyak dua titik di antaranya. Konsep dimensi metrik pada graf pertama kali diperkenalkan oleh Harary dan Melter (1976). Mereka memperkenalkan gagasan bahwa setiap titik dalam graf dapat direpresentasikan berdasarkan jarak ke himpunan titik tertentu, dan bahwa representasi tersebut dapat digunakan untuk membedakan antara titik-titik dalam graf.

Misalkan G adalah graf sederhana dan terhubung. Misalkan u dan v adalah titik di G dan $u \neq v$. Misalkan $W = \{w_{1,}w_2, \dots, w_k\}$ adalah himpunan bagian dari $V(G)$. Maka repesentasi titik u terhadap W ditulikan $r\,(u|w) = \left(d(u, w_1), d(u, w_2), \dots, d(u, w_k)\right)$. Himpunan W disebut himpunan pemisah pada G jika untuk setiap titik u, v pada $G, u \neq v$ mengakibatkan $r(u|w) \neq r(u|w)$. Dimensi metrik adalah kardinalitas minimum dari semua himpunan pemisah pada $\dim(G)$ atau $\beta(G)$ (Chartrand et al., 2000).

Berdasarkan konsep tersebut, Saputro et al. (2017) telah menentukan dimensi metrik dari graf hasil kali sisir, yaitu produk dari sembarang graf terhadap graf lintasan. Mereka menunjukkan bahwa dimensi metrik dari graf hasil kali sisir $\beta(G \rhd_{\boldsymbol{o}} H) = \begin{cases} m\,.(\beta(H)-1) \\ m\,.\;\beta(H), \end{cases}$ Jika terdapat basis dari H mengandung titik o, sebaliknya.

Penelitian terkait dimensi metrik pada graf hasil konstruksi khusus juga dilakukan oleh Wahyudi dan Sumarno (2010), yang meneliti dimensi metrik pada graf kincir dengan pola $K_1 + mK_3$. Studi tersebut menunjukkan bahwa struktur graf yang kompleks membutuhkan pendekatan analitis yang cermat untuk menentukan basis dan nilai minimum dimensi metrik.

Selanjutnya, Gafur dan Suhadi (2021) mengembangkan kajian dimensi metrik dengan meninjau graf-graf reguler dan keterkaitannya dengan himpunan dominasi penentu (*locating-dominating set*). Melanjutkan hasil-hasil tersebut, penelitian ini difokuskan untuk menentukan dimensi metrik dari graf hasil kali sisir khusus, $(p_n \rhd_0 G)$ pada graf lintasan terhadap graf G dimana $G = (n-2) - reguler$ dan $G = (n-3) - reguler$ tetapi tidak berlaku sebaliknya.

B. Metode Penelitian

Metode dalam penelitian ini adalah studi literatur dimana pada tahapan ini kami sebagai peneliti melakukan pemahaman konsep dan studi literatur dari buku, jurnal dan penelitian mengenai dimensi metrik pada graf. Kemudian pada tahapan selajutnya peneliti menentukan graf yang akan digunakan. Pada tahapan ini, kami menentukan graf lintasan P_n untuk $n \geq 1$ dan $H = (m-2) - reguler$ dimana $m \geq 4$ dan $H = (m-3) - reguler$ dimana $m \geq 5$. Selanjutnya peneliti mengkonstruksi graf $P_n \rhd_o H$, $H = (m-2) - reguler$ dan $H = (m-3) - reguler$ yang akan diteliti berdasarkan defenisinya yaitu graf $P_n \rhd_o H$, $H = (m-2) - reguler$ dan $H = (m-3) - reguler$.

Oleh karena itu, kami mendapapatkan dimensi metrik pada graf yang telah dibagun atau dikontruksi, yaitu:

a. Melabeli titik sedemikian sehingga titik yang bertetangga berbeda serta membuktikannya.

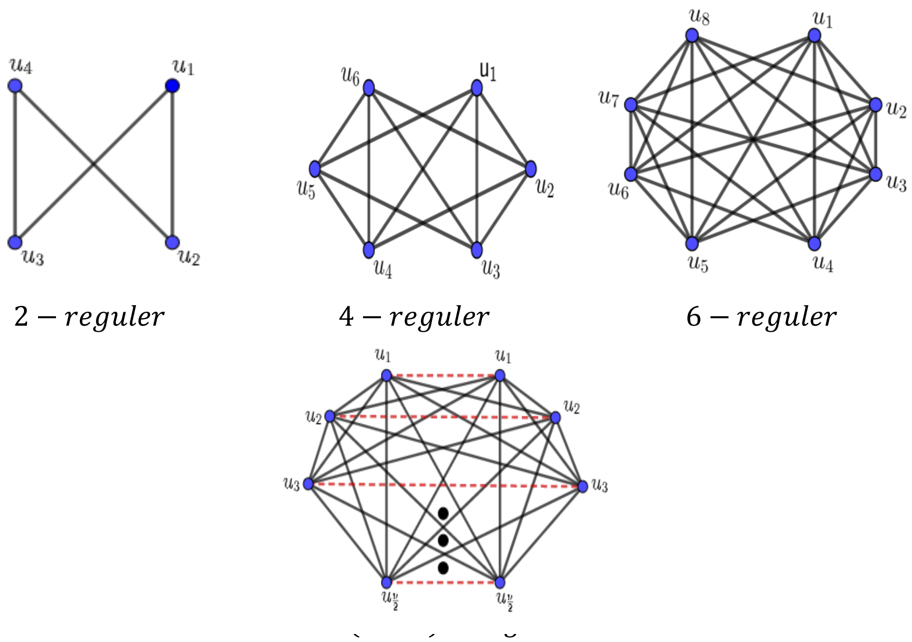
Amalgamasi : Journal of Mathematics and Applications
Vol. 4, No. 1, May, 2025
ISSN: 2830-3695

b. Menentukan himpunan pemisah pada graf $P_n \rhd_o H,\ H = (m-2) - reguler$ serta membuktikannya
c. Menentukan himpunan pemisah pada graf $P_n \rhd_o H,\ H = (m-3) - reguler$ serta membuktikannya
d. Menentukan batas bawah dan batas atas dimensi metrik melalui himpunan pemisah pada graf $P_n \rhd_o H, H = (m-2) - reguler$ serta membuktikannya.
e. Menentukan batas bawah dan batas atas dimensi metrik melalui himpunan pemisah pada graf $P_n \rhd_o H, H = (m-3) - reguler$ serta membuktikannya.

C. Hasil Dan Pembahasan

1. Graf $(n-2) - reguler$

Misalkan $G = (V, E)$ merupakan graf dengan orde $n \geq 4$ adalah graf $(n-2) - reguler$. Perhatikan bahwa untuk graf $(n-2) - reguler$, setiap titk u di $V(G)$ memenuhi $|N\ (u)| = n - 2$. Dengan kata lain, setiap titik $V(G)$ tidak bertetangga dengan satu titik lainnya. Adapun ilustrasi dari graf $(n-2) - reguler$. Perhatikan Gambar 1 berikut ini.



Gambar 1. Graf $(n-2) - reguler$

Lemma 1.1 Misalkan G merupakan graf dengan orde $n \geq 4$. Jika G merupakan graf $(n-2) - reguler$, maka n genap.
Bukti. Misalkan G adalah graf $(n-2) - reguler$, dimana $n \geq 4$. Akan di tunjukkan n genap. Karena G adalah graf $(n-2) - reguler$, maka $|E\ (G)| = \frac{n(n-2)}{2}$. Oleh karena itu, $2|E(G)| = n\ (n-2)$.
Perhatikan:

$2|E(G)|$ adalah genap, maka $n\ (n-2)$ adalah genap. Jika n genap maka selesai.
Andaikan n ganjil maka $\exists\ k \ni \mathbb{Z} \ni n = 2k+1$. Karena $n(n-2) = (2k+1)\big((2k+1)-2\big) = 4k^2 - 1 = 2(2k^2) - 1 = 2t - 1$, untuk suatu $t = 2k^2$. Oleh karena itu, $n(n-2)$ adalah bilangan ganjil, kontradiksi dengan $n(n-2)$ adalah genap. Haruslah n genap.

Lemma 1.2 Misalkan W adalah himpunan pembeda/resolving. Untuk setiap titik u, v di $V(G)$ dan $u \neq v$ serta $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap titik w di W maka $u \in W$ atau $v \in W$.

Bukti. Misalkan G adalah graf terhubung dan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ adalah himpunan pembeda dari G. Akan di buktikan $u \in W$ atau $v \in W$. Andaikan $u \notin W$dan $v \notin W$, dengan kata lain $W \subseteq V(G) \setminus \{u, v\}$.
Perhatikan:
$r(u|W) = \big(d(u,w_1,), d(u,w_2,), \dots, d(u,w_k,)\big)$ dan $r(v|W) = \big(d(v,w_1,), d(v,w_2,), \dots, d(v,w_k,)\big)$. Karena $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap w di W maka $r(u|W) = r(v|W)$. Akibatnya W bukanlah himpunan pembeda, terjadi kontradiksi jadi $u \in W$ atau $v \in W$.

Lemma 1.3. Misalkan G adalah $(n-2)$ reguler. Untuk setiap himpunan $W = \left\{u_i \middle| 1 \le i \le \frac{n}{2}\right\}$ adalah himpunan pembeda.
Bukti. Misalkan $W = \left\{u_i \middle| 1 \le i \le \frac{n}{2}\right\}$ maka $V(G) \setminus W = \left\{v_i \middle| 1 \le i \le \frac{n}{2}\right\}$. Misalkan v_i dan v_j untuk $1 \le i < j \le \frac{n}{2}$. Karena $u_i \in N_G(v_j)$ dan $u_i \notin N_G(v_i)$ maka $d(v_j, u_i) = 1$ dan $d(v_i, u_i) = 2$, akibatnya $r(v_i|W) \neq r(v_j|W)$. Jadi W adalah himpunan pembeda.

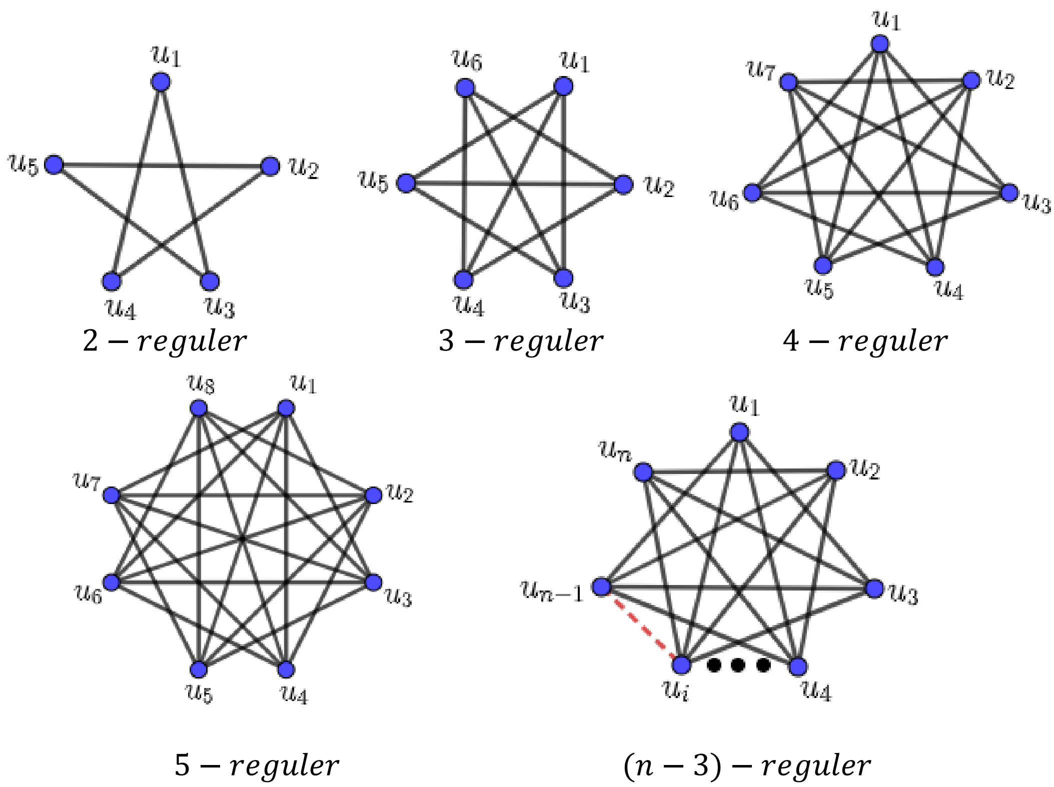
Lemma 1.4. Misalkan G adalah $(n-2)$ reguler. Untuk setiap himpunan $W = \left\{u_i \middle| 1 \le i \le \frac{n}{2}\right\}$ adalah himpunan pembeda.
Bukti. Misalkan $W = \left\{u_i \middle| 1 \le i \le \frac{n}{2}\right\}$ maka $V(G) \setminus W = \left\{v_i \middle| 1 \le i \le \frac{n}{2}\right\}$. Misalkan v_i dan v_j untuk $1 \le i < j \le \frac{n}{2}$. Karena $u_i \in N_G(v_j)$ dan $u_i \notin N_G(v_i)$ maka $d(v_j, u_i) = 1$ dan $d(v_i, u_i) = 2$, akibatnya $r(v_i|W) \neq r(v_j|W)$. Jadi W adalah himpunan pembeda.

Teorema 1 Misalkan G adalah graf $(n-2)$-reguler dengan orde $n \ge 4$. Maka $\beta(G) = \frac{n}{2}$.
Bukti. Misalkan G adalah graf $(n-2)$ reguler dengan orde $n \ge 4$. Berdasarkan lemma 4.1.1 n adalah bilangan genap. Akan ditunjukkan kedua kasus.
Kasus 1:
$\beta(G) \le \frac{n}{2}$. Misalkan $V(G) = \left\{u_i, v_i | 1 \le i \le \frac{n}{2}\right\}$ dengan $u_i v_i \notin E(G)$. pilih $= \left\{u_i \middle| 1 \le i \le \frac{n}{2}\right\}$.
Karena $u_i v_i \notin E(G)$ maka $d(v_i u_i) = 2$ dan karena $u_i v_j \in E(G)$ maka $d(v_j u_i) = 1$ untuk $i \neq j$. Dengan demikian untuk setiap $i \neq j$ berlaku $r(v_i|W) \neq r(v_j|W)$ jadi W adalah himpunan pembeda dari G sehingga $\beta(G) \le \frac{n}{2}$.

Kasus 2:
$\beta(G) \geq \frac{n}{2}$. Berdasarkan lemma 1.2 jika $uv \notin E(G)$ dengan $d(u,z) = d(v,z)$ untuk setiap $z \in V(G)\backslash\{u,v\}$ maka $u \in W$ atau $v \in W$. Karena terdapat $\frac{n}{2}$ pasangan titik yang tidak bertetangga, maka himpunan pembeda W dan G memenuhi $|W| \geq \frac{n}{2}$.
Berdasarkan kedua kasus diatas, maka $\beta(G) \geq \frac{n}{2}$.

2. Graf $(n-3) - reguler$

Misalkan $G = (V,E)$ merupakan graf dengan orde $n \geq 5$ adalah graf $(n-3) - reguler$. Perhatikan bahwa graf $(n-3)$-$reguler$ mempunyai sub graf dari G yang isomor dengan $k_n\backslash\in(C_m)$ untuk $m \in [3, \ldots, n]$. Adapun ilustrasi dari graf teratur-$(n-3)$. Dapat dilihat pada gambar 2.



Gambar 2 Graf $(n-3) - reguler$

Lemma 2.1. Untuk $n \geq 5$, misalkan $G' \subseteq G$ dan $G' = K_m\backslash E(C_m)$ dimana $m \in \{3,4,\ldots,n\}$. Jika W adalah himpunan pembeda dari G, maka $W \cap V(G') \neq \emptyset$.

Bukti. Misalkan $G' \subseteq G$ dan $G' = K_m\backslash E(C_m)$ dimana $m \in \{3,4,\ldots,n\}$ untuk $n \geq 5$. Misalkan W adalah himpunan pembeda dari G. Akan dibuktikan bahwa $W \cap V(G') \neq \emptyset$. Dengan menggunakan kontradiksi, andaikan bahwa $W \cap V(G') = \emptyset$. Tanpa mengurangi keumuman, pilih dua titik sebutlah u dan v di $V(G')$ selain W' sehingga $d_{G'}(u,z) =$

$d_{G'}(v,z)$ untuk setiap z di W'. Berdasarkan lemma 1.2, u di W' atau v di W'. Karena $G' \subseteq G$ maka $W \cap V(G') \neq \emptyset$. Kontradiksi dengan $W \cap V(G') = \emptyset$. Haruslah $W \cap V(G') \neq \emptyset$.

Lemma 2.2. Untuk $n \geq 5$ misalkan $G' \subseteq G$ dan $G' = K_m \backslash E(C_m)$ dimana $m \,\epsilon\, \{3,4,\dots,n\}$. Jika W adalah himpunan pembeda dari G, dan $W' = W \cap V(G')$ maka setiap dua titik berbeda u, v di $V(G')$ selain W' memenuhi $r_{G'}(u|W') \neq r_{G'}(v|W')$.

Bukti. Misalkan $G' \subseteq G$ dan $G' = K_m \backslash E(C_m)$ dimana $m \,\epsilon\, \{3,4,\dots,n\}$ untuk $n \geq 5$. Misalkan Jika W adalah himpunan pembeda dari G, dan $W' = W \cap V(G')$. Ambil sembarang u, v di $V(G')$ selain W'. Akan ditunjukkan bahwa $r_{G'}(u|W') \neq r_{G'}(v|W')$. Dengan menggunakan metode kontradiksi, andaikan $r_{G'}(u|W') = r_{G'}(v|W')$. Artinya bahwa $r_{G'}(u|W') = r_G(u|W')$. Misalkan $G^* = G \setminus G'$ dan $W^* = W \setminus W'$ maka $r_G(u|W^*) = r_G(v|W^*)$. Dengan demikian, $r_G(u|W) = r_G(v|W)$. Kontradiksi dengan W adalah himpunan pembeda dari G.

Lemma 2.3. Untuk $n \geq 5$, Misalkan $G' \subseteq G$ dan $G' = K_m \backslash E(C_m)$ dimana $m \,\epsilon\, \{3,4,5,6\}$ misalkan W adalah himpunan pembeda pada G maka $|W \cap V(G')| \geq \begin{cases} 3, & \text{jika } m = n = 6 \\ 2, & selain\ itu \end{cases}$

Bukti. Misalkan untuk $n \geq 5$, $G' \subseteq G$ dan $G' = K_m \backslash E(C_m)$ dimana $m \,\epsilon\, \{3,4,5,6\}$ misalkan W adalah himpunan pembeda. Akan dibuktikan

$$|W \cap V(G')| \geq \begin{cases} 3, & \text{jika } m = n = 6 \\ 2, & selain\ itu \end{cases}$$

Untuk membuktikan hal tersebut dibagi beberapa kasus berikut ini:

1) $m = n = 6$ sehingga $|W \cap V(G')| \geq 3$

   Dengan menggunakan kontradiksi.

   Andaikan $|W \cap V(G')| \leq 2$. Dikasus ini $G' = G$.

   Misalkan $W_1{}'$ adalah himpunan pembeda dari $G_1{}'$ dan $W_2{}'$ adalah himpunan pembeda dari $G_2{}'$. Dimana $V(G_1') \cap V(G_2') = V(G')$ dan $W_1' \cap W_2' = W'$. Maka $W' \subseteq V(G')$ adalah himpunan pembeda. Akibatnya terdapat titik $u \in V(G_1{}') \setminus W_1{}'$ dan $v \in V(G_2{}') \setminus W_2{}'$ sehingga $d(u,z) = 1 = d(v,z)$ untuk setiap titik $z \in W'$. Dengan demikian, $r(u|W') = r(v|W')$, kontradiksi dengan W' adalah himpunan pembeda.

   Perlu dibuktikan $W = \{x_1, x_3, x_5\}$ adalah himpunan pembeda dari G'. Karena $r(x_1|W) = (0,1,1)$, $r(x_2|W) = (2,2,1)$, $r(x_3|W) = (1,0,1)$, $r(x_4|W) = (1,2,2)$, $r(x_5|W) = (1,1,0)$, $r(x_6|W) = (2,1,2)$. Jadi himpunan titik W adalah himpunan pembeda dari G'.

2) $|W \cap V(G')| \geq 2$ untuk $m \neq 6$ atau $n \neq 6$.

   Andaikan $|W \cap V(G')| \leq 1$ artinya $|W \cap V(G')| = 0$ dan $|W \cap V(G')| = 1$. Jika $|W \cap V(G')| = 0$, Maka terdapat dua titik $u, v \in V(G')$, $r(u|W) = r(v|W)$ karena $d(u,z) = d(v,z)$ untuk setiap $z \in W$. Berarti W bukan himpunan pembeda ini bertetangga dengan hipotesa diatas.

   Asumsikan $|W \cap V(G')| = 1$. Misalkan $W' = |W \cap V(G') = \{x_i\}$ dengan $i \in \{1,2,\dots,m\}$. Misalkan x_j dan x_k adalah dua titik yang berbeda sehingga $x_j x_i, x_k x_i \notin$

$E(G')$. Maka $d_{G'}(x_j x_i) = 2 = d_{G'}(x_k x_i)$ sehingga $r_{E'}(x_j|W') = r_{E'}(x_k|W')$. Karena setiap titik di $G \setminus G'$ terhubung dengan x_j dan x_k maka $r_G(x_j|W) = r_G(x_k|W)$ kontradiksi jadi $|W \cap V(G')| \geq 2$.

Sekarang kami akan membuktikan bahwa $|W \cap V(G')| = 2$. Kami akan mendefinisikan himpunan titik W_m adalah sebagai berikut

$$W_m = \begin{cases} \{x_1, x_2\} & \text{jika } m \in \{3,4,5\} \\ \{x_1, x_3\} & jika\ m = 6 \end{cases}$$

Akan dibuktikan W_m adalah himpunan pembeda dari subgraf G' dari G.

Misalkan titik pada $V(G') \setminus W_m$.

a) $m = 3$ maka $|V(G') \setminus W_m| = 1$
W_m adalah himpunan pembeda dari G'

b) $m = 4$ maka $V(G') \setminus W_m = \{x_3, x_4\}$ akibatnya

$$d(x_3, x_1) = 1, \quad d(x_3, x_2) = 2$$
$$d(x_4, x_1) = 2, \quad d(x_4, x_2) = 1$$

maka

$$r(x_3|W_m) \neq r(x_4|W_m)$$

Jadi W_m adalah himpunan pembeda

c) $m = 5$ maka $V(G') \setminus W_m = \{x_3, x_4 x_5\}$ akibatnya

$$d(x_3, x_1) = 1, \quad d(x_4, x_2) = 1$$
$$d(x_3, x_2) = 2, \quad d(x_5, x_1) = 2$$
$$d(x_4, x_1) = 1, \quad d(x_5, x_2) = 1$$

Maka

$$r(x_3|W_m) \neq r(x_4|W_m) \neq r(x_5|W_m)$$

Jadi W_m adalah himpunan pembeda

d) $m = 6$ maka $V(G') \setminus W_m = \{x_2, x_4 x_5, x_6\}$ akibatnya

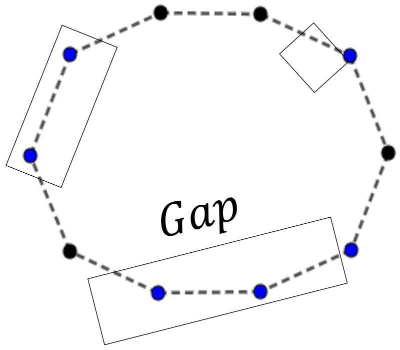
$$d(x_2, x_1) = 2, \quad d(x_5, x_1) = 1$$
$$d(x_2, x_3) = 2, \quad d(x_5, x_3) = 1$$
$$d(x_4, x_1) = 1, \quad d(x_6, x_1) = 2$$
$$d(x_4, x_3) = 2, \quad d(x_6, x_3) = 1$$

Maka

$$r(x_2|W_m) \neq r(x_4|W_m) \neq r(x_5|W_m) \neq r(x_6|W_m)$$

Jadi W_m adalah himpunan pembeda.

Misalkan G adalah $n - 3$ reguler. Komplemen dari G yaitu $\bar{G}$. Kita defenisikan Gap adalah himpunan semua titik didalam lintasan terpendek dari titik u ke v di $\bar{G}$ Selain titik u dan v. Berikut merupakan contoh Gap pada gambar dibawah ini:



Gambar 3 *Gap*

Lemma 2.4. Misalkan G adalah graf $(n-3)-reguler$ dengan orde $n \geq 5$. Himpunan titik W adalah himpunan pembeda dari G jika dan hanya jika W memenuhi ketiga sifat berikut

1. Setiap Gap di G memuat maksimal tiga titik.
2. Paling banyak terdapat satu Gap di G yang memuat tiga titik.
3. Misalkan A adalah Gap yang memuat dua atau tiga titik. Setiap Gap di G yang bertetangga di A harus memuat paling banyak satu titik.

Bukti. Misalkan G adalah graf $(n-3)-reguler$ dengan orde $n \geq 5$.
$(\Longrightarrow)$ Himpunan titik W adalah himpunan pembeda dari G. Kami akan membuktikan ketiga sifat berdasarkan kontradiksi.

1. Andaikan terdapat Gap di G memuat maksimal empat titik. Misalkan $a_1, a_2, a_3, a_4 \in V(G)$ dimana $a_i a_{i+1} \in E(G)$ dengan $1 \leq i \leq 3$. Semua titik tidak berada di W maka $r(a_2|W) = r(a_3|W)$ karena $d(a_2, z) = 1 = d(a_3, z)$ untuk setiap z di W, kontradiksi.
2. Andaikan terdapat dua gap yang mengandung 3 titik. Misalkan $\{a_1, a_2, a_3\}$ dan $\{b_1, b_2, b_3\}$ adalah dua gap yang berbeda dimana $a_i a_{i+1}, b_i b_{i+1} \notin E(G)$ dengan $1 \leq i \leq 2$. Maka $d(a_2, z) = 1 = d(b_2, z)$untuk setiap z di W. Akibatnya $r(a_2|W) = r(b_2|W)$, kontradiksi.
3. Misalkan A adalah Gap yang memuat dua atau tiga titik. Andaikan terdapat gap di G yang bertetangga di A harus memuat paling sedikit 2 titik. Misalkan $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in V(G)$ dimana $a_i a_{i+1} \in E(G)$ dengan $1 \leq i \leq 5$ dan a_3 adalah titik yang berada di W. Maka $d(a_2, z) = 1 = d(a_4, z)$ untuk setiap z di $W \setminus \{a_3\}$ dan $d(a_2, a_3) = 2 = d(a_4, a_3)$. Akibatnya $r(a_2|W) = r(b_2|W)$, kontradiksi.

$(\Longleftarrow)$ Misalkan $W \subseteq V(G)$ memenuhi ketiga sifat tersebut. Kami akan membuktikan bahwa W adalah himpunan pembeda dari G.
Ambil sembarang titik x anggota $V(G)$ selain W yang berada di suatu Gap.

1. x berada di Gap yang memuat paling banyak 1 titik.
   Misalkan a dan b di W merupakan titik unjung dari Gap yang memuat titk x. Maka xa dan xb tidak bertetangga sehingga $(x, a) = 2$, $d(x, b) = 2$ dan $d(x, z) = 1$ untuk setiap titik z di W. Ambil sembarang $u \in V(G) \backslash W \cup \{x\}$ karena titik u bertetangga dengan a atau b. Maka $d(u, a) = 1$ atau $d(u, b) = 1$, jadi untuk setiap $u \in V(G) \backslash W$ dan $u \neq x$ berlaku $r(u|W) \neq r(x|W)$ maka u himpunan pembeda.
2. x berada di dalam Gap yang berukuran 2 titik.

Misalkan $a, b, c, d \in V(G)$ dan a, d ada di W dengan ab, bc, cd tidak bertetangga di $E(G)$, Maka $x = b$ atau $x = c$. Jika $x = b$ diperoleh $d(x, a) = 2$ dan $d(x, z) = 1$ untuk setiap $z \in W$. Ambil sembarang titik $u \in V(G) \setminus (W \cup \{x\})$ perhatikan terdapat dua kemungkinan posisi u. Kemungkinan pertama u berada di dalam Gap yang titik unjung a. Misalkan $t \in W$ adalah titik unjung Gap yang memuat u. Perhatikan bahwa $d(u, t) = 2$ dan $d(x, t) = 1$. Kemungkinan kedua u berada di dalam Gap yang titik-titk unjung bukan a. Misalkan $y, t \in W$ adalah titik unjung yang memuat u. Perhatikan $d(u, a) = 1$ dan $d(x, a) = 2$. Jadi $x \in V(G) \setminus W$ dan $x \neq a$ berlaku $r(u|W) \neq r(x|W)$.

3. x berada di dalam Gap yang berukuran 3 titik.
   Misalkan $a, b, c, d, e \in V(G)$ dan a, e ada di W dengan ab, bc, cd, de tidak bertetangga di $E(G)$, maka diperoleh $x = b, x = d\ atau\ x = c$.
   a. $x = c$
      Perhatikan bahwa $r(x|W) = (1,1,1, \cdots, 1)$. Karena paling banyak satu buah Gep berukuran 3 maka $x = c$ adalah satu-satunya titik yang memenuhi $r(x|W) = (1,1,1, \cdots, 1)$.
   b. $x = b$ atau $x = d$
      Tanpa mengulangi keumuman misalkan $u = b$. Perhatikan bahwa $d(x, a) = 2$ dan $d(x, z) = 1$ untuk setiap titk $z \in W \setminus \{a\}$. Berdasarkan sifat 1 dan 2, titik $x = b$ adalah satu-satunya titik yang memiliki syarat ini.
      Jadi , untuk setiap titik $u \in V(G) \setminus W$ dan $x \neq u$ berlaku $r(x|W) \neq r(u|W)$ sehingga W adalah himpunan pembeda.

Teorema 2

Misalkan $n \geq 5$ dan G adalah graf $(n-3)$-reguler. Misalkan $G' \subseteq G$ dengan $G' = K_m \setminus E(C_m)$ untuk suatu $m \in \{7, 8, \ldots, n\}$ maka $\beta(G') = \left\lceil \frac{2(m-1)}{5} \right\rceil$.

Bukti. Untuk $n \geq 7$ misalkan $V(G') = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m\}$ dengan $E(C_m) = \{x_1x_2, x_2x_3, \ldots x_{m-1}x_m, x_mx_1\}$.

Kami akan membuktikan $\beta(G') = \left\lceil \frac{2(m-1)}{5} \right\rceil$ dengan membagi beberapa kasus berikut ini.

Kasus 1. $\beta(G') \geq \left\lceil \frac{2(m-1)}{5} \right\rceil$,

Misalkan W' adalah himpunan pembeda terkecil dari G'

1. $|W'|$ adalah bilangan genap.
   Misalkan $|W'| = 2k$ untuk suatu bilangan bulat positif k. Maka banyaknya gap di G' adalah $2k$. Karena W' memenuhi ketiga sifat di Lemma 2.4, maka banyaknya gap yang berisi maksimal 1 titik adalah k buah gap dan banyaknya gap yang berisi lebih dari satu titik adalah k buag gap. Dengan demikian, banyaknya titik dalam gap maksimal adalah $k \cdot 1$ dan $3 + 2(k-1) = 2k + 1$. Akibatnya maksimal banyaknya titik dalam gap di G' adalah $(k \cdot 1) + (2k + 1) = 3k + 1$, kita peroleh $m - |W'| \leq 3k + 1$ sehingga $k \geq \left\lceil \frac{m-1}{5} \right\rceil$. Jadi $\beta(G') = |W'| = 2k \geq 2 \cdot \left\lceil \frac{m-1}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{2m-2}{5} \right\rceil$

2. $|W'|$ adalah bilangan ganjil.
   Misalkan $|W'| = 2k+1$ untuk suatu bilangan bulat positif k. Maka banyaknya gap di G' adalah $2k+1$. Karena W' memenuhi ketiga sifat di Lemma 2.4, maka banyaknya gap yang berisi maksimal 1 titik adalah $(k+1)\cdot 1 = k+1$ buah gap dan banyaknya gap yang berisi lebih dari satu titik adalah k buag gap. Dengan demikian, banyaknya titik dalam gap maksimal adalah $k+1$ dan $3+2(k-1) = 2k+1$. Akibatnya maksimal banyaknya titik dalam gap di G' adalah $(k+1)+(2k+1) = 3k+2$, kita peroleh $m - |W'| \le 3k+2$ sehingga $k \ge \left\lceil \frac{m-3}{5} \right\rceil$. Jadi $\beta(G') = |W'| = 2k \ge 2\cdot\left\lceil \frac{m-3}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{2m-6}{5} \right\rceil \ge \left\lceil \frac{2m-2}{5} \right\rceil$

Kasus 2. $\beta(G') \le \left\lceil \frac{2(m-1)}{5} \right\rceil$.

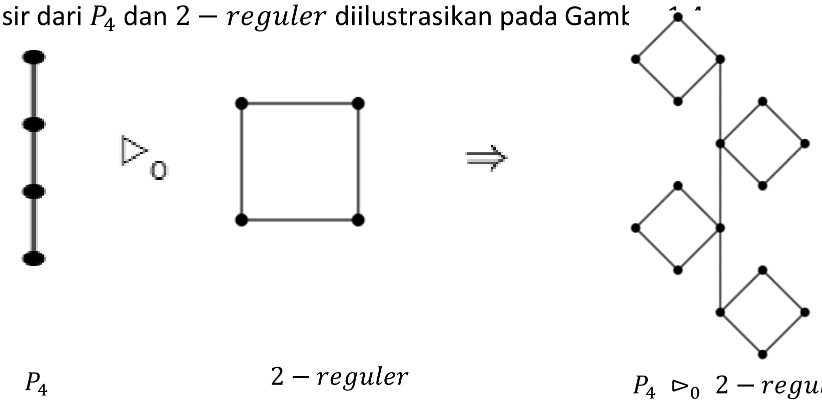
- Misalkan $m \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 5)$, maka terdapat bilangan bulat $k \ge 2$ sehingga $m = 5k$. Maka $|W'| = \left\lceil \frac{2(5k)-2}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{10k-2}{5} \right\rceil = 2k$. Pilih $W' = \{\{x_2, x_6\} \cup \{x_{5i+3}, x_{5i+6} | 1 \le i \le k-2\} \cup \{x_{5k-2}, x_{5k}\}\}$. Karena W' memuat $2k$ titik dan memenuhi sifat 1, 2, dan 3 di Lemma 2.4, maka W' adalah himpunan pembeda.
- Misalkan $m \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 5)$, maka terdapat bilangan bulat $k \ge 2$ sehingga $m = 5k+1$. Maka $|W'| = \left\lceil \frac{2(5k+1)-2}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{10k}{5} \right\rceil = 2k$. Pilih $W' = \{\{x_2, x_6\} \cup \{x_{5i+3}, x_{5i+6} | 1 \le i \le k-2\} \cup \{x_{5k+3}, x_{5k+6}\}\}$. Karena W' memuat $2k$ titik dan memenuhi sifat 1, 2, dan 3 di Lemma 2.4, maka W' adalah himpunan pembeda.
- Misalkan $m \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 5)$, maka terdapat bilangan bulat $k \ge 1$ sehingga $m = 5k+2$. Maka $|W'| = \left\lceil \frac{2(5k+2)-2}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{10k+2}{5} \right\rceil = 2k+1$. Pilih $W' = \{\{x_2, x_6\} \cup \{x_{5i+3}, x_{5i+6} | 1 \le i \le k-1\} \cup \{x_{5k+2}\}\}$. Karena W' memuat $2k+1$ titik dan memenuhi sifat 1, 2, dan 3 di Lemma 2.4, maka W' adalah himpunan pembeda.
- Misalkan $m \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 5)$, maka terdapat bilangan bulat $k \ge 1$ sehingga $m = 5k+3$. Maka $|W'| = \left\lceil \frac{2(5k+3)-2}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{10k+4}{5} \right\rceil = 2k+1$. Pilih $W' = \{\{x_2, x_6\} \cup \{x_{5i+3}, x_{5i+6} | 1 \le i \le k-1\} \cup \{x_{5k+3}\}\}$. Karena W' memuat $2k+1$ titik dan memenuhi sifat 1, 2, dan 3 di Lemma 2.4, maka W' adalah himpunan pembeda.
- Misalkan $m \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 5)$, maka terdapat bilangan bulat $k \ge 1$ sehingga $m = 5k+4$. Maka $|W'| = \left\lceil \frac{2(5k+4)-2}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{10k+6}{5} \right\rceil = 2k+2$. Pilih $W' = \{\{x_2, x_6\} \cup \{x_{5i+3}, x_{5i+6} | 1 \le i \le k-1\} \cup \{x_{5k+3}, x_{5k+4}\}\}$. Karena W' memuat $2k+2$ titik dan memenuhi sifat 1, 2, dan 3 di Lemma 2.4, maka W' adalah himpunan pembeda.

Berdasarkan kasus 1 dan 2, maka $\beta(G') = \left\lceil \frac{2(m-1)}{5} \right\rceil$.

3. Hasil Kali Sisir Graf $P_m \rhd_o H$

Untuk mencari dimensi metric dari graf $P_m \rhd_o H$ dimana $m \ge 2$ maka diperlukan beberapa defenisi. Misalkan titik salinan $o \in V(H)$ dan $x \in V(P_m)$ maka didefenisikan $G_o = \{(x, o) | \ x \in V(P_m)\}$ dan $H_x = \{(x, u) | \ u \in V(H)\ \}$. Kami juga mendefinisikan $H_x^- = H_x \setminus (x, o)$. Karena graf H dengan orde n maka H_x^- tidak kosong. Jika $z \in H_x^-$ maka $N_{P_m \rhd_o H}(z) \subseteq H_x$ serta $W \subseteq V(P_m)$, notasi dari $P_m[W]$ adalah subgraf maksimum dari P_m untuk semua titik di W.

Misalkan graf lintasan P_m dengan $m \geq 2$ dan graf $(n-1)-reguler$, $(n-2)-reguler$, dan $(n-3)-reguler$ dengan orde n atau kita sebut graf H merupakan graf terhubung dan tidak trivial. Untuk mencari $\beta(P_m \rhd_{\boldsymbol{o}} H)$, dengan memperhatikan H_x untuk setiap $x \in V(P_m)$. Hasil kali sisir dari P_4 dan $2-reguler$ diilustrasikan pada Gamb



Gambar 1.4. Graf hasil kali sisir P_4 dan $(n-2)$-reguler dengan $m = 4$.

Kami juga mendefenisikan W adalah himpunan pembeda dari $P_m \rhd_{\boldsymbol{o}} H$ dan $W_x = W \cap H_x$. Lemma 3.1, menunjukkan bahwa H_x berkonstribusi paling sedikit $\beta(H) - 1$ titik di W.

Lemma 3.1. Untuk setiap titik x di $V(P_m)$ maka $W \cap H_x \neq \emptyset$. Selain itu $|W \cap H_x| \geq \beta(H) - 1$.
Bukti. Misalkan W adalah himpunan pembeda di $P_m \rhd_o H$. Misalkan $x \in V(P_m)$. Akan dibuktikan $W \cap H_x \neq \emptyset$. Andaikan $W \cap H_x = \emptyset$ maka terdapat titik $y, z \in H_x^-$ dimana $H_x^- = H_x \backslash \{(x, o)\}$ sehingga $d_{P_m \rhd_o H}(y, t) = d_{P_m \rhd_o H}(z, t)$ untuk setiap $t \in W$. Akibatnya $r_{P_m \rhd_o H}(y|W) = r_{P_m \rhd_o H}(z|W)$. Kontradiksi dengan W adalah himpunan pembeda di $P_m \rhd_o H$, haruslah $W \cap H_x \neq \emptyset$. Selain itu, kami akan membuktikan bahwa $|W \cap H_x| \geq \beta(H) - 1$. Andaikan $|W \cap H_x| \leq \beta(H) - 2$ dimana $W_x = W \cap H_x$. Artinya terdapat dua titik yang tidak berada pada W_x, sebutlah titik a dan b sehingga kedua titik memiliki ketertangga $N_{P_m \rhd_o H}(a) \cap W_x \neq \emptyset$, $N_{P_m \rhd_o H}(b) \cap W_x \neq \emptyset$ dan $r_{P_m \rhd_o H}(a|W_x) = r_{P_m \rhd_o H}(b|W_x)$ karena $d_{P_m \rhd_o H}(a, t) = 1 = d_{P_m \rhd_o H}(b, t)$ untuk setiap $t \in W'$. Dengan demikian $r_{P_m \rhd_o H}(a|W) = r_{P_m \rhd_o H}(a|W_x) = r_{P_m \rhd_o H}(b|W_x) = r_{P_m \rhd_o H}(b|W)$. Kontradiksi dengan W adalah pembeda di $P_m \rhd_o H$. Haruslah $|W \cap H_x| \geq \beta(H) - 1$.

Berdasarkan lemma 3.1 diatas, menjelaskan bahwa untuk setiap x di $V(P_m)$, dan z di H_x^- maka $N_{P_m \rhd_o H}(z) \subseteq H_x$. Ini menunjukkan bahwa hanya ada satu titik diluar dari H_x yaitu (x, o). Sebagai akibat dari lemma 3.1 sebagai berikut.

Akibat 3.1. Jika $|W_x| = \beta(H) - 1$, maka $(x, o) \notin W_x$. Selain itu, jika $W_x \cup \{(x, o)\}$ adalah himpunan pembeda dari $(P_m \rhd_o H)[H_x]$.

Lemma 3.1. diatas memberikan batas bawah dari $\beta(P_m \rhd_o H)$ yaitu $\beta(P_m \rhd_o H) \geq |V(P_m)| \cdot (\beta(H) - 1)$. Jika $\beta(P_m \rhd_o H) \geq |V(P_m)| \cdot (\beta(H) - 1)$ dan W adalah himpunan pembeda dari $P_m \rhd_o H$ dimana $|W| \geq |V(P_m)| \cdot (\beta(H) - 1)$, maka berdasarkan akibat 3.1 semua titik di G_o tidak berada pada W. Karena setiap titik x di $V(P_m)$, H_x memberikan konstribusi $\beta(H) - 1$ titik di W, artinya terdapat titik z di H_x^- sehingga $r_{P_m \rhd_o H}(z|W_x) = r_{P_m \rhd_o H}\big((x,o)\big|W_x\big)$ dan $r_{P_m \rhd_o H}(z|W) \neq r_{P_m \rhd_o H}\big((x,o)\big|W\big)$ karena titik z harus melewati titik (x,o) untuk menuju ke titik di W lainnya.

Untuk lemma 3.2 di bawah ini, himpunan H_x memberikan kontribusi $\beta(H) - 1$ titik di himpunan pembeda dari $P_m \rhd_o H$.

Lemma 3.2. Misalkan B adalah himpunan pembeda dari H dengan $\beta(H) - 1$ titik. Untuk setiap x di $V(P_m)$. Misalkan juga $B_x = \{(x,v)|x \in V(P_m), v \in B\}$. Maka $D = \bigcup_{x \in V(P_m)} B_x$ adalah himpunan pembeda dari $P_m \rhd_o H$.

Bukti. Ambil sebarang titik a, b di $V(P_m \rhd_o H)$ selain D dimana titik a dan b berbeda. Jika kedua titik a dan b berada di H_x dan untuk setiap x di $V(P_m)$ maka jelas bahwa $r_{P_m \rhd_o H}(a|B_x) \neq r_{P_m \rhd_o H}(b|B_x)$ karena untuk setiap titik $z \in B_x$ sehingga $d_{P_m \rhd_o H}(a,z) \neq d_{P_m \rhd_o H}(b,z)$, akibatnya $r_{P_m \rhd_o H}(a|D) \neq r_{P_m \rhd_o H}(b|D)$. Sekarang asumsikan bahwa titik a di H_x dan b di H_y dengan titik x dan y di $V(P_m)$ dan titik x dan y berbeda. Terdapat dua titik yang berbeda di u di B_x dan v di B_y sehingga $ua, vb \in E(P_m \rhd_o H)$ tetapi $ub, va \notin E(P_m \rhd_o H)$. Akibatnya $r_{P_m \rhd_o H}(a|D) \neq r_{P_m \rhd_o H}(b|D)$ karena $d_{P_m \rhd_o H}(a,u) \neq d_{P_m \rhd_o H}(b,u)$ dan $d_{P_m \rhd_o H}(a,v) \neq d_{P_m \rhd_o H}(b,v)$. Jadi $D = \bigcup_{x \in V(P_m)} B_x$ adalah himpunan pembeda dari $P_m \rhd_o H$.

Menurut lemma 3.1 dan 3.2 di atas, mengandung beberapa akibat yang berbeda di bawah ini.

Akibat 3.2. Misalkan P_m dan H adalah graf terhubung dengan orde paling sedikit 3 titik. Maka $\beta(P_m \rhd_o H) \geq |V(P_m)| \cdot (\beta(H) - 1)$.

Akibat 3.3. Misalkan W adalah himpunan pembeda dari $P_m \rhd_o H$ dimana $|W| = \beta(P_m \rhd_o H)$. Untuk setiap x di $V(P_m)$ dan $W_x = W \cap H_x$. Maka $|W_x| = \beta(H) - 1$.

Teorema berikut ini, menunjukkan bahwa jika H adalah graf $(n-2) - reguler$ atau $(n-2) - reguler$ dengan orde n diperoleh dimensi metric dari $P_m \rhd_o H$ adalah$|V(P_m)| \cdot (\beta(H) - 1)$.

Teorema 3.

Untuk $m \geq 3$, misalkan P_m dan H adalah graf $(n-2) - reguler$ atau $(n-3) - reguler$ dengan orde n. Misalkan titik salinan o di $V(H)$. Maka $\beta(P_m \rhd_o H) = |V(P_m)| \cdot (\beta(H) - 1)$.

Bukti. Misalkan $m \geq 3$, misalkan P_m dan H adalah graf $(n-2) - reguler$ atau $(n-3) - reguler$. Misalkan titik salinan o di $V(H)$. Akan dibuktikan $\beta(P_m \rhd_o H) = |V(P_m)| \cdot (\beta(H) - 1)$ dengan menujukkan bahwa $\beta(P_m \rhd_o H) \geq |V(P_m)| \cdot (\beta(H) - 1)$ dan $\beta(P_m \rhd_o H) \leq |V(P_m)| \cdot (\beta(H) - 1)$. Berdasarkan akibat 4.3.2, $\beta(P_m \rhd_o H) \geq |V(P_m)| \cdot (\beta(H) - 1)$. Oleh karena itu, kami hanya perlu menunjukkan bahwa $\beta(P_m \rhd_o H) \leq |V(P_m)| \cdot (\beta(H) - 1)$. Misalkan W adalah himpunan pembeda dari $P_m \rhd_o H$ dan $W_x = W \cap H_x$.

Berdasarkan akibat 4.3.3, maka $|W_x| = \beta(H) - 1$. Misalkan $D = \bigcup_{x \in V(P_m)} W_x$, berdasarkan lemma 4.3.2 maka D adalah himpunan pembeda dari $P_m \rhd_o H$. Oleh karena itu, diperoleh $|D| \leq \underbrace{|\beta(H) - 1| + |\beta(H) - 1| + \cdots + |\beta(H) - 1|}_{|V(P_m)|}$ atau $|D| \leq |V(P_m)| \cdot (\beta(H) - 1)$. Berdasarkan kedua kasus tersebut, maka dapat disimpulkan bahwa $\beta(P_m \rhd_o H) = |V(P_m)| \cdot (\beta(H) - 1)$.

3.1 Bilangan Pembeda dari $P_m \rhd_o H$ dimana graf H adalah $(n-2)$ −reguler dengan orde $m \geq 2$ dan $n \geq 4$

Untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 4$, P_m merupakan graf lintasan dan H adalah graf $(n-2)$ −reguler. Misalkan titik $o \in V(H)$ maka hasil kali sisir P_m dengan H dinotasikan $P_m \rhd_o H$, didefenisikan sebagai sebuah graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah salinan P_m dan $|V(P_m)|$ salinan H, yaitu $H_1, H_2, \dots . H_{|V(P_m)|}$, kemudian menempelkan titik ke-i di P_m pada titik v di $H_i, i = [1|V(P_m)|]$.

Teorema 3.1.
Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 4$, misalkan P_m adalah graf lintasan dan H adalah graf $(n-2)$ −reguler dan tidak tervial. Misalkan titik salinan o di $V(H)$. Maka $\beta(P_m \rhd_o H) = m \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right)$.
Bukti. Berdasarkan teorema 3, menyatakan bahwa $\beta(H) = \frac{n}{2}$ titik dan menurut teorema 4.3, $\beta(P_m \rhd_o H) = |V(P_m)| \cdot (\beta(H) - 1)$. Dengan demikian diperoleh $\beta(P_m \rhd_o H) = m \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right) = m \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right)$.

3.2 Bilangan Pembeda dari $P_m \rhd_o H$ dimana graf H adalah $(n-3)$ −reguler dengan orde $m \geq 2$ dan $n \geq 5$

Untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 5$, P_m merupakan graf lintasan dan H adalah graf $(n-3) - reguler$ dan tak tervial. Misalkan titik salinan $o \in V(H)$ maka hasil kali sisir P_m dengan H dinotasikan $P_m \rhd_o H$, didefenisikan sebagai sebuah graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah salinan P_m dan $|V(P_m)|$ salinan H, yaitu $H_1, H_2, \dots . H_{|V(P_m)|}$, kemudian menempelkan titik ke-i di P_m pada titik v di $H_i, i = [1|V(P_m)|]$.

Teorema 3.2.
Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 5$, misalkan P_m adalah graf lintasan dan H adalah graf $(n-3) - reguler$ dan tidak tervial. Misalkan titik salinan o di $V(H)$. Maka $\beta(P_m \rhd_o H) = m \cdot \left(\frac{2n-7}{5}\right)$.
Bukti. Berdasarkan teorema 3, menyatakan bahwa $\beta(H) = \left\lceil \frac{2n-2}{5} \right\rceil$ titik dan menurut teorema 4.3, $\beta(P_m \rhd_o H) = |V(P_m)| \cdot (\beta(H) - 1)$. Dengan demikian diperoleh $\beta(P_m \rhd_o H) = m \cdot \left(\left\lceil \frac{2n-2}{5} \right\rceil - 1\right) = m \cdot \left\lceil \frac{2n-7}{5} \right\rceil$.

D. Simpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan oleh peneliti mengenai dimensi metrik dari hasil kali sisir pada graf lintasan terhadap beberapa graf reguler dengan orde n, maka dalam penelitian ini diperoleh hasil sebagai berikut:

1. Misalkan G adalah graf $(n-2)$ reguler dengan orde $n \geq 4$. Maka $\beta(G) = \frac{n}{2}$.
2. Misalkan $n \geq 5$ dan G adalah graf $(n-3)$-reguler. Misalkan $G' \subseteq G$ dengan $G' = K_m \backslash E(C_m)$ untuk suatu $m \in \{7,8,\ldots,n\}$ maka $\beta(G') = \left\lceil \frac{2(m-1)}{5} \right\rceil$.
3. Untuk $m \geq 3$, misalkan P_m dan H adalah graf $(n-2) - reguler$ atau $(n-3) - reguler$ dengan orde n. Misalkan titik salinan o di $V(H)$. Maka $\beta(P_m \rhd_o H) = |V(P_m)| \cdot (\beta(H) - 1)$.
4. Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 6$, misalkan P_m adalah graf lintasan dan H adalah graf $(n-2)$ −reguler dan tidak tervial. Misalkan titik salinan o di $V(H)$. Maka $\beta(P_m \rhd_o H) = m \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right)$.
5. Untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 5$, misalkan P_m adalah graf lintasan dan H adalah graf $(n-3)$ −reguler dan tidak tervial. Misalkan titik salinan o di $V(H)$. Maka $\beta(P_m \rhd_o H) = m \cdot \left\lceil \frac{2n-7}{5} \right\rceil$.

E. Daftar Pustaka

Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M. A., & Oellermann, O. R. (2000). Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, *105*(1-3), 99-113.

Saputro, S. W., Mardiana, N., & Purwasih, I. A. (2017). The metric dimension of comb product graphs. *Matematicki vesnik*, *69*(4), 248-258.

Abdul Gafur, A. K., & Saputro, S. W. (2021). On Locating-Dominating Set of Regular Graphs. *Journal of Mathematics*, *2021*(1), 8147514.

Harary, F., & Melter, R. A. (1976). On the metric dimension of a graph. *Ars combin*, *2*(191-195), 1.

Wahyudi, S. Sumarno. 2010. *Dimensi Metrik pada Graf Kincir dengan Pola K1+ mK3*, 731-744