AMALGAMASI
JOURNAL OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS
ISSN 2830-3695

EKSPLORASI BILANGAN TERHUBUNG PELANGI LOKASI PADA GRAF ULAR SEGITIGA

Ariestha Widyastuty Bustan[1*], Akmal Hi Dahlan[2], Diyah Safitri Qammariyah Kharie[3]
[1,2,3]Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Pasifik Morotai
Email korespondensi*: ariesthawidyastutybustan@gmail.com

Abstrak

Konsep bilangan terhubung pelangi lokasi bertujuan untuk menentukan bilangan bulat positif terkecil k sehingga terdapat pewarnaan-k pelangi lokasi pada graf yang memungkinkan setiap titik memiliki kode pelangi yang unik. Dalam penelitian ini, kami mengkaji nilai bilangan terhubung pelangi lokasi pada graf ular segitiga. Metode yang digunakan meliputi analisis struktur graf dan konstruksi lintasan titik pelangi yang memenuhi syarat keunikan kode pelangi untuk setiap simpul. Hasil penelitian menunjukkan bahwa, untuk graf berorde lebih dari lima, bilangan terhubung pelangi lokasi pada graf ular segitiga sama dengan jumlah titik pemotong dalam graf tersebut.

Kata kunci: bilangan terhubung pelangi lokasi; graf ular segitiga; kode pelangi; pewarnaan pelangi lokasi

Sejarah artikel

Diterima: 10-02-2025
Direvisi: 12-05-2025
Dipublikasikan: 30-05-2025

Abstract

The concept of the locating rainbow connection number in a graph is an innovation in graph coloring theory that combines the ideas of rainbow vertex coloring and partition dimension in graphs. This concept aims to determine the smallest positive integer k such that there exists a locating rainbow k-coloring of the graph, allowing each vertex to have a unique rainbow code. In this study, we investigate the locating rainbow connection number of the triangle snake graph. The method employed involves analyzing the graph's structure and constructing rainbow vertex-paths that ensure the uniqueness of the rainbow code for each vertex. The results show that, for graphs of order greater than five, the locating rainbow vertex-connection number of a triangle snake graph is equal to the number of cut-vertices in the graph.

Keywords*: locating rainbow coloring; locating rainbow connection number; rainbow code; triangle snake graph*

Article history

Received: 10-02-2025
Revised: 12-05-2025
Published: 30-05-2025

A. Pendahuluan

Konsep bilangan terhubung pelangi lokasi pada graf, yang diperkenalkan pada tahun 2021 (Bustan et al.,2021), merupakan inovasi dalam teori pewarnaan graf. Konsep ini memadukan pewarnaan titik pelangi dengan konsep dimensi partisi. Konsep pewarnaan titik pelangi merupakan konsep pewarnaan titik dari suatu graf sehingga setiap pasangan titik terhubung oleh lintasan dengan titik-titik internalnya berwarna berbeda (Krivelevich & Yuster, 2010). Sedangkan konsep dimensi partisi berkaitan dengan partisi minimum titik pada graf agar setiap titik dapat diidentifikasi secara unik berdasarkan jaraknya ke tiap bagian partisi (Chartrand et al., 2000). Kajian lebih lanjut mengenai pewarnaan titik pelangi dapat ditemukan dalam

Simamora & Salman (2015), Lei et al (2018), Bustan & Salman (2018, 2019), dan Awanis et al (2025).

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ merupakan graf sederhana, berhingga, dan terhubung serta k adalah suatu bilangan bulat positif, pewarnaan-k titik pelangi pada G adalah suatu pemetaan $c : V(G) \rightarrow [1, k]$ sehingga untuk setiap dua titik berbeda u dan v di G terdapat lintasan yang menghubungkan keduanya dengan titik-titik internalnya berwarna berbeda. Suatu lintasan P pada G yang titik-titik internalnya berbeda warna dikatakan sebagai lintasan titik pelangi. Bilangan terhubung titik pelangi graf G, dinotasikan dengan $rvc(G)$, adalah bilangan bulat positif terkecil k sehingga terdapat pewarnaan-k titik pelangi pada G. Untuk $i \in [1, k]$, misalkan R_i adalah himpunan titik-titik yang diberi warna i dan $\Pi = R_1, R_2, \ldots, R_k$ merupakan partisi terurut dari $V(G)$. Kode pelangi titik $v \in V(G)$ terkait Π, dinotasikan dengan $rc_\Pi(v)$, adalah tupel-k terurut yang didefinisikan sebagai $rc_\Pi(v) = \big(d(v, R_1), d(v, R_2), \ldots, d(v, R_k)\big)$ dengan $d(v, R_i) = \{min\ d(v, y) | y \in R_i\}$ untuk setiap $i \in [1, k]$. Jika setiap titik di G memiliki kode pelangi yang berbeda, maka pewarnaan c disebut pewarnaan k pelangi lokasi pada G. Bilangan terhubung pelangi lokasi graf G, dinotasikan dengan $rvcl(G)$, didefinisikan sebagai bilangan bulat positif terkecil k sehingga terdapat suatu pewarnaan-k pelangi lokasi pada G. Hasil-hasil yang berkaitan dengan bilangan terhubung pelangi lokasi pada graf dapat dilihat dalam Bustan et al (2023, 2025) dan Mahmud & Bustan (2025).

Berikut ini adalah beberapa hasil penelitian terdahulu terkait bilangan terhubung pelangi lokasi pada graf yang diperlukan dalam pembuktian hasil penelitian ini.

Lema 1 *(Bustan et al.,2021) Misalkan* m *merupakan suatu bilangan bulat positif dengan* $m \geq 3$. *Jika* G *merupakan graf terhubung berorde* m, *maka* $2 \leq rvcl(G) \leq m$

Lema 2 *(Bustan et al.,2021) Misalkan* c *merupakan suatu pewarnaan pelangi lokasi dari* G *dan* u *dan* v *merupakan dua titik berbeda di* G. *Jika* $d(u, x) = d(v, x)$ *untuk* $x \in V(G) - \{u, v\}$, *maka* $c(u) \neq c(v)$.

Lema 3 *(Bustan et al.,2023) Jika* G *adalah graf terhubung berorde* $m \geq 2$, *maka* $rvcl(G) = 2$ *Jika dan hanya Jika* G *merupakan lintasan berorde 2, 3, atau 4.*

Lema 4 *(Imrona et al.,2021) Jika* p *adalah banyaknya titik pemotong pada suatu graf* G, *maka* $rvcl(G) \geq p$.

Lema 4 memberikan salah satu batas bawah dari bilangan terhubung pelangi lokasi yaitu lebih besar atau sama dengan banyaknya jumlah titik pemotong pada suatu graf. Oleh karena itu, dalam penelitian ini kami mengeksplorasi bilangan terhubung pelangi lokasi pada kelas graf yang memuat titik-titik pemotong untuk melihat hubungan antara bilangan terhubung pelangi lokasi pada graf dengan banyaknya jumlah titik pemotong. Kelas graf yang diteliti adalah kelas gra ular segitiga.

B. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode studi literatur melalui studi literatur, membuat hipotesis melalui perumusan suatu lema atau teorema, pembuktian teorema, dan penarikan kesimpulan.

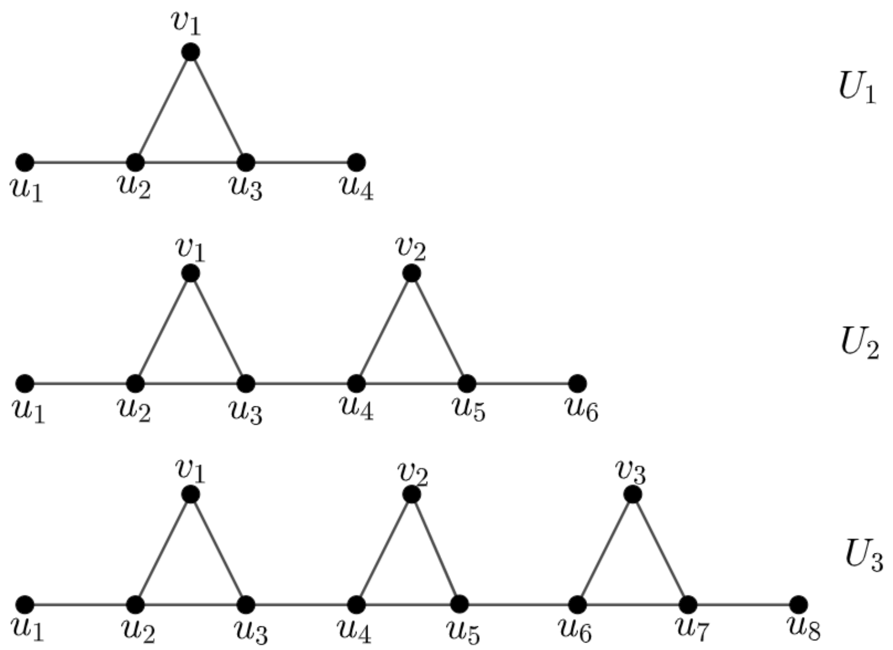
Amalgamasi : Journal of Mathematics and Applications
Vol. 4, No. 1, May, 2025
ISSN: 2830-3695

C. Hasil Dan Pembahasan

Didefinisikan $[x, y] = \{u \in \mathbb{Z} | \, x \leq u \leq y\}$ untuk memudahkan penulisan. Graf ular segitiga, dinotasikan dengan U_m, adalah graf berorde $3m + 2$ dengan $m \geq 1$ dan titik-titik dan sisi-sisinya secara berturut-turut dapat dilabeli sebagai berikut (Sumathi & Rathi, 2018).

$$V(U_m) = \{u_i | i \in [1, 2m + 2]\} \cup \{v_i | i \in [1, m]\}.$$

$$E(U_m) = \{u_i u_{i+1} | i \in [1,2m + 1]\} \cup \{v_i u_{2i} | i \in [1, m]\} \cup \{v_i u_{2i+1} | i \in [1, m]\}$$

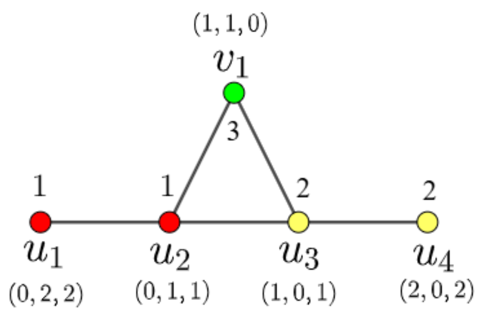


Gambar 1. Graf $\boldsymbol{U_1}$, $\boldsymbol{U_2}$, dan $\boldsymbol{U_3}$

Teorema 1. Misalkan m merupakan bilangan asli dengan $m \geq 1$. Jika $U(m)$ *merupakan graf ular segitiga berorde* $3m + 2$, *maka*

$$rvcl(U_m) = \begin{cases} 2m + 1, & \text{untuk } m = 1 \\ 2m, & \text{untuk } m \geq 2 \end{cases}$$

Bukti.



Gambar 2. Suatu pewarnaan pelangi lokasi pada graf $\boldsymbol{U_1}$

Untuk $m = 1$, berdasarkan **Lema 1**, **Lema 3**, dan **Gambar 2**, diperoleh $rvcl(U_1) = 3 = 2m + 1$. Selanjutnya untuk $m \geq 2$. Perhatikan bahwa banyaknya titik pemotong pada graf U_m adalah

Amalgamasi : Journal of Mathematics and Applications
Vol. 4, No. 1, May, 2025
ISSN: 2830-3695

sebanyak $2m$, sehingga berdasarkan **Lema 4**, diperoleh $rvcl(U_m) \geq 2m$. Selanjutnya ditunjukkan $rvcl(U_m) \leq 2m$ dengan mendefinisikan suatu pewarnaan titik sebagai berikut. $(c: V(U_m) \to [1, 2m])$

$$c(u_1) = 1;$$
$$c(u_i) = i - 1, \text{untuk } i \in [2, 2m + 1];$$
$$c(u_{2m+2}) = 2m;$$
$$c(v_i) = 2i \text{ untuk } i \in [1, m - 1];$$
$$c(v_m) = 2i - 1.$$

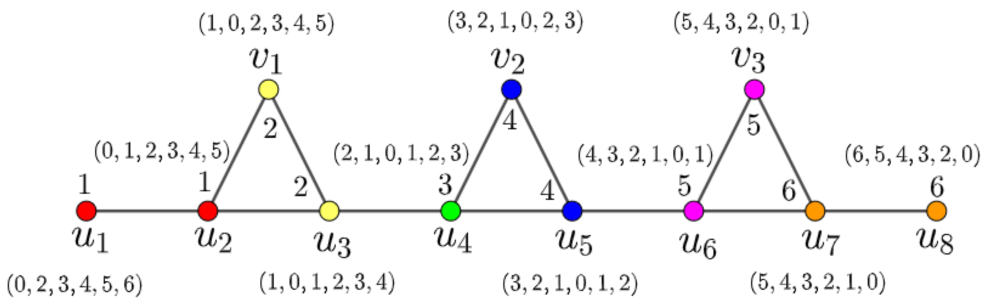
Selain dua titik yang bertetangga, sebarang dua titik di graf U_m selalu dihubungkan oleh suatu lintasan yang semua titik internalnya merupakan titik-titik pemotong. Disisi lain, berdasarkan pewarnaan titik yang diberikan sebelumnya, setiap titik pemotong diberikan warna yang berbeda. Oleh karena itu, setiap sebarang dua titik di U_m selalu dihubungkan oleh lintasan titik pelangi. Selanjutnya ditunjukkan bahwa setiap titik di U_m memiliki kode pelangi yang berbeda sebagai berikut

1) $c(u_1) = c(u_2) = 1$, tetapi $d(u_1, R_2) > d(u_2, R_2)$, sehingga $rc_\Pi(u_1) \neq rc_\Pi(u_2)$.
2) $c(u_i) \neq c(u_j)$ untuk $i, j \in [2, 2m + 1], i \neq j$, sehingga $rc_\Pi(u_i) \neq rc_\Pi(u_j)$.
3) $c(u_{2m+1}) = c(u_{2m+2}) = 2m$, tetapi $d(u_{2m+1}, R_{2m-1}) < d(u_{2m+2}, R_{2m-1})$, sehingga $rc_\Pi(u_{2m+1}) \neq rc_\Pi(u_{2m+2})$.
4) $c(v_i) \neq c(v_j)$ untuk $i, j \in [1, m], i \neq j$, sehingga $rc_\Pi(v_i) \neq rc_\Pi(v_j)$.
5) $c(v_i) = c(u_{2i+1}) = 2i$, untuk $i \in [1, m - 1]$, tetapi $d(v_i, R_{2i+1}) >$ $d(u_{2i+1}, R_{2i+1})$, sehingga $rc_\Pi(v_i) \neq rc_\Pi(u_{2i+1})$.
6) $c(v_m) = c(u_{2m}) = 2m - 1$, tetapi $d(v_m, R_{2m-2}) > d(u_{2m}, R_{2m-2})$, sehingga $rc_\Pi(v_m) \neq rc_\Pi(u_{2m})$.

Poin 1)-4) menunjukkan bahwa setiap titik di graf U_m memiliki kode pelangi yang berbeda. Oleh karena itu $rvcl(U_m) = 2m$.

■

Gambar 3 mengilustrasikan suatu pewarnaan pelangi lokasi pada graf U_3.



Gambar 3. Suatu pewarnaan pelangi lokasi pada graf U_3

D. Simpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang diperoleh, selain U_1, bilangan terhubung pelangi lokasi pada graf U_m sama dengan banyaknya jumlah titik pemotong pada graf U_m. Dengan kata lain, graf U_m untuk $m \geq 2$ menunjukkan batas bawah yang diberikan pada Lema 4 adalah batas bawah yang ketat.

E. Daftar Pustaka

Awanis, Z. Y., Wardhana, I. G. A. W., & Irwansyah. (2025, June). Strong rainbow vertex-connection number of comb product of a path and a connected graph. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 3293, No. 1, p. 060001). AIP Publishing LLC.

Bustan, A. W., & Salman, A. N. M. (2018). The rainbow vertex-connection number of star fan graphs. *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, *5*(3), 112-116.

Bustan, A. W., & Salman, A. N. M. (2019, December). The rainbow vertex connection number of star wheel graphs. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2202, No. 1). AIP Publishing.

Bustan, A. W., Salman, A. N. M., & Putri, P. E. (2021). On the Locating Rainbow Connection Number of A Graph. *Journal of Physics: Conference Series*, *1764*(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1764/1/012057

Bustan, A. Wi, Salman, A. N. M., & Putri, P. E. (2025). Determining the locating rainbow connection numbers of vertex-transitive graphs. *Communications in Combinatorics and Optimization*, (), -. doi: 10.22049/cco.2025.29742.2137

Bustan, A. W., Salman, A. N. M., Putri, P. E., & Awanis, Z. Y. (2023). On the locating rainbow connection number of trees and regular bipartite graphs. *Emerging Science Journal*, *7*(4), 1260-1273.

Chartrand, G., Salehi, E., & Zhang, P. (2000). The partition dimension of a graph. *Aequationes mathematicae*, *59*(1), 45-54.

Imrona, M., Salman, A. N. M., Uttunggadewa, S., & Putri, P. E. (2021, March). On the Locating Rainbow Connection Number of the Comb Product with Complete Graphs or Trees. In *Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing* (pp. 203-214). Cham: Springer International Publishing.

Krivelevich, M., & Yuster, R. (2010). The rainbow connection of a graph is (at most) reciprocal to its minimum degree. *Journal of Graph Theory*, *63*(3), 185-191.

Lei, H., Li, S., Liu, H., & Shi, Y. (2018). Rainbow vertex connection of digraphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, *35*, 86-107.

Mahmud, R., & Bustan, A. W. (2025). BILANGAN TERHUBUNG PELANGI LOKASI PADA GRAF KEMUDI DAN GRAF JARING. *Science Map Journal*, *7*(1), 6-13.

Simamora, D. N., & Salman, A. N. M. (2015). The rainbow (vertex) connection number of pencil graphs. *Procedia Computer Science*, *74*, 138-142.

Sumathi, P., & Rathi, A (2018). Quotient Labeling of Snake Related Graphs. IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM)