AMALGAMASI
JOURNAL OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS
ISSN 2830-3695

ANALISIS BILANGAN TERHUBUNG PELANGI PADA GRAF PAN

Rauman Mahmud

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Pasifik Morotai
Morotai Selatan, Pulau Morotai, Maluku Utara, Indonesia
Email korespondensi*: raumanmahmud1@gmail.com

Abstrak

Penelitian ini membahas bilangan terhubung pelangi pada graf pan. Konsep keterhubungan pelangi merupakan salah satu topik penting dalam teori graf yang berkaitan dengan pewarnaan sisi, di mana lintasan yang menghubungkan antar pasangan titik harus memuat sisi dengan warna berbeda. Penentuan bilangan terhubung pelangi memiliki relevansi dalam bidang optimasi jaringan, keamanan komunikasi, serta desain jalur transportasi yang efisien. Pada penelitian ini, digunakan pendekatan analisis struktur graf pan untuk menentukan batas bawah dan batas atas, serta memperoleh nilai eksak dari bilangan terhubung pelangi. Hasil penelitian menunjukkan adanya pola keterhubungan khusus pada graf pan yang memengaruhi jumlah minimum warna yang dibutuhkan.

Kata kunci: bilangan terhubung pelangi; graf pan; pewarnaan pelangi

Sejarah artikel

Diterima: 16-03-2025
Direvisi: 22-05-2025
Dipublikasikan: 30-05-2025

Abstract

This study discusses the rainbow connection number of pan graphs. The concept of rainbow connection is one of the important topics in graph theory related to edge coloring, where a path connecting any pair of vertices must consist of edges with distinct colors. Determining the rainbow connection number is relevant in the fields of network optimization, communication security, and the design of efficient transportation routes. In this research, a structural analysis approach of pan graphs is employed to determine the lower and upper bounds, as well as to obtain the exact value of the rainbow connection number. The results reveal a specific connectivity pattern in pan graphs that affects the minimum number of colors required.

Keywords*: rainbow connection number; pan graph; rainbow coloring*

Article history

Received: 16-03-2025
Revised: 22-05-2025
Published: 30-05-2025

A. Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika diskrit yang memiliki peran penting dalam pemodelan berbagai permasalahan nyata, seperti jaringan komunikasi, transportasi, sistem distribusi, hingga analisis struktur molekul. Salah satu topik yang berkembang pesat dalam teori graf adalah pewarnaan graf, khususnya pewarnaan pelangi yang tidak hanya terbatas pada pewarnaan titik atau sisi, tetapi juga pada varian pewarnaan yang terkait dengan konsep keterhubungan.

Dalam beberapa dekade terakhir, penelitian mengenai bilangan terhubung pelangi dan bilangan terhubung titik pelangi telah menarik banyak perhatian. Konsep pewarnaan pelangi diperkenalkan oleh Chartrand, dkk pada tahun 2008 (Chartrand, dkk., 2008). Pewarnaan sisi pelangi pada graf menekankan bahwa antara setiap pasangan titik terdapat lintasan sisi pelangi, yaitu lintasan dengan sisi-sisi yang diberi warna berbeda. Konsep ini relevan dalam pemodelan jaringan komunikasi yang membutuhkan jalur unik dan aman melalui penggunaan saluran atau frekuensi berbeda. Pewarnaan pada sisi-sisi lintasan membantu memastikan distribusi atau transmisi yang aman dan tidak saling tumpang tindih (David dan Agustin, 2017). Hasil terkait bilangan terhubung pelangi tidak hanya terbatas pada kelas graf (Dudek, dkk.,2015), tetapi juga pada beberapa operasi graf, seperti pada graf amalgamasi (Fitriani dan Salman, 2016). Selain itu penelitian ini juga telah memberikan karakterisasi untuk beberapa kondisi tertentu, seperti dalam (Kemnitz dan Schiermeyer, 2011) yang mengkarakterisasi graf-graf dengan bilangan terhubung pelangi dua hingga kompleksitas algoritma konsep bilangan terhubung pelangi yang dibahas dalam (Chakraborty, 2011).

Salah satu penelitian terdahulu dilakukan oleh Simamora dan Salman (2015) yang menganalisis bilangan keterhubungan pelangi dan keterhubungan titik-pelangi pada graf pensil (*pencil graph*). Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa penentuan parameter keterhubungan pelangi sangat dipengaruhi oleh struktur dasar graf yang diteliti.

Sejalan dengan penelitian tersebut, graf pan (*pan graph*) merupakan salah satu kelas graf sederhana yang menarik untuk ditelaah lebih lanjut. Graf ini memiliki struktur berupa sebuah lingkaran dengan satu titik tambahan yang dihubungkan ke salah satu titik pada lingkaran, sehingga menghasilkan bentuk yang menyerupai wajan atau “pan.” Kompleksitas graf pan yang berbeda dengan graf pensil memungkinkan adanya pola keterhubungan pelangi yang khas.

Dengan demikian, penelitian ini memotivasi untuk menganalisis bilangan terhubung pelangi pada graf pan. Hasil kajian diharapkan dapat memperluas pemahaman mengenai keterhubungan pelangi pada kelas graf lain yang memiliki struktur sederhana namun unik, serta memberikan kontribusi pada pengembangan teori graf khususnya dalam aspek pewarnaan keterhubungan.

B. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode studi literatur dan analisis teoretis. Penelitian difokuskan pada kajian struktur graf pan serta penerapan konsep bilangan terhubung pelangi. Tahapan penelitian yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. **Studi Literatur**: Tahap ini diawali dengan mengkaji berbagai literatur terkait teori graf, khususnya penelitian-penelitian terdahulu mengenai bilangan terhubung pelangi. Selain itu, dipelajari pula sifat-sifat graf pan, definisi formal, serta karakteristik strukturalnya, sehingga dapat diperoleh pemahaman yang menyeluruh mengenai objek kajian.
2. **Perumusan Hipotesis**: Berdasarkan hasil kajian literatur, dirumuskan hipotesis awal mengenai kemungkinan nilai bilangan terhubung pelangi pada graf pan. Hipotesis ini mempertimbangkan sifat keterhubungan graf pan yang terdiri dari siklus dan sebuah titik tambahan yang terhubung ke salah satu titik pada lingkaran.
3. **Analisis Struktur Graf Pan**: Pada tahap ini dilakukan analisis mendalam terhadap struktur graf pan, termasuk identifikasi jumlah titik, jumlah sisi, serta keteraturan topologinya. Analisis ini mencakup eksplorasi lintasan dalam graf, identifikasi pasangan titik, serta pola keterhubungan yang muncul.
4. **Pembuktian Teorema dan Lema**: Setelah hipotesis dirumuskan, dilakukan pembuktian secara matematis dengan menggunakan pendekatan deduktif. Tahap ini melibatkan penggunaan definisi, lema, dan teorema yang relevan dari teori graf, serta konstruksi lintasan pelangi yang valid. Proses pembuktian ini bertujuan untuk memperoleh nilai eksak dari bilangan terhubung pelangi pada graf pan.
5. **Verifikasi dan Diskusi**: Hasil pembuktian kemudian diverifikasi dengan menguji konsistensinya terhadap sifat-sifat dasar graf pan maupun hasil penelitian terdahulu pada graf sejenis, misalnya graf siklus atau graf pensil. Pada tahap ini juga dilakukan pembahasan mengenai pola keterhubungan yang unik pada graf pan serta implikasinya terhadap jumlah minimum warna yang diperlukan.
6. **Penarikan Kesimpulan**: Tahap akhir penelitian adalah merumuskan hasil pembuktian ke dalam bentuk teorema atau lema yang valid. Kesimpulan memuat nilai eksak, batas bawah, atau batas atas dari bilangan terhubung pelangi pada graf pan, serta kontribusi teoretis penelitian ini terhadap pengembangan kajian pewarnaan dalam teori graf.

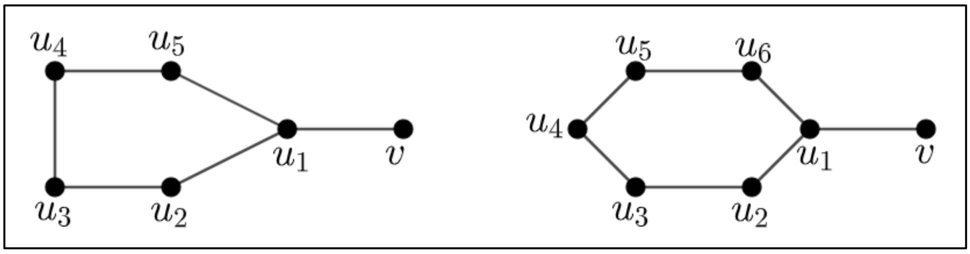
C. Hasil Dan Pembahasan

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ merupakan graf sederhana, berhingga, dan terhubung serta k adalah suatu bilangan bulat positif, pewarnaan-k pelangi pada G adalah suatu pemetaan α : $E(G) \rightarrow [1, k]$ sehingga untuk setiap dua titik di G dihubungkan oleh lintasan sisi pelangi atau lintasan yang sisi-sisi internalnya berwarna berbeda. Bilangan terhubung pelangi pada graf G, dinotasikan dengan $rc(G)$, adalah bilangan bulat positif terkecil k sehingga terdapat pewarnaan-k pelangi.

Graf n-pan, atau graf pan n, dinotasikan dengan P_n adalah graf yang diperoleh dengan menghubungkan sebuah graf lingkaran C_n dengan graf tunggal K_1 melalui sebuah sisi penghubung (bridge). Misalkan $V(P_n) = \{u_i | i \in [1, n]\} \cup \{v\}$ dan $E(P_n) =$

Amalgamasi : Journal of Mathematics and Applications
Vol. 4, No. 1, May, 2025
ISSN: 2830-3695

$\{u_i u_{i+1} | i \in [1, n-1]\} \cup \{u_{n-1}u_n\} \cup \{u_1 v\}\}$ mendefinisikan himpunan titik dan himpunan sisi pada graf secara berturut-turut.



Gambar 1. Graf P_5 dan P_6

Teorema 1. Misalkan n merupakan bilangan asli dengan $n \geq 3$. Jika P_n *merupakan graf pan berorde* $n+1$, *maka*

$$rc(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Bukti.

Andaikan $rc(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Artinya dengan menggunakan $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ warna, graf P_n memiliki pewarnaan pelangi. Diketahui terdapat setidaknya dua pasang titik di P_n yang lintasan terpendek yang menghubungi keduanya adalah sepanjang $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$. Akibatnya terdapat dua sisi pada lintasan tersebut yang diwarnai dengan warna yang sama, kontradiksi dengan pernyataan bahwa terdapat pewarnaan-$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ pelangi pada graf P_n. Oleh karena itu, haruslah $rc(P_n) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$. Selanjutnya, akan dibuktikan $rc(P_n) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ dengan mendefinisikan pewarnaan sisi sebagai berikut.

$$c(vu_1) = 1$$
$$c(u_i u_{i+1}) = i + 1 \text{ untuk } i \in \left[1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right]$$
$$c(u_i u_{i+1}) = i - \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right) \text{ untuk } i \in \left[\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, n-1\right]$$
$$c\left(u_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1} u_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2}\right) = 1 \text{ untuk } n \text{ ganjil.}$$

Berdasarkan aturan pewarnaan di atas, multiset warna di sepanjang C_n membentuk urutan "menaik lalu menurun" dari 2 hingga $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$, dan hanya bila nnn ganjil ada tepat satu sisi pada siklus C_n yang juga berwarna 1.

Perhatikan kedua klaim berikut ini:

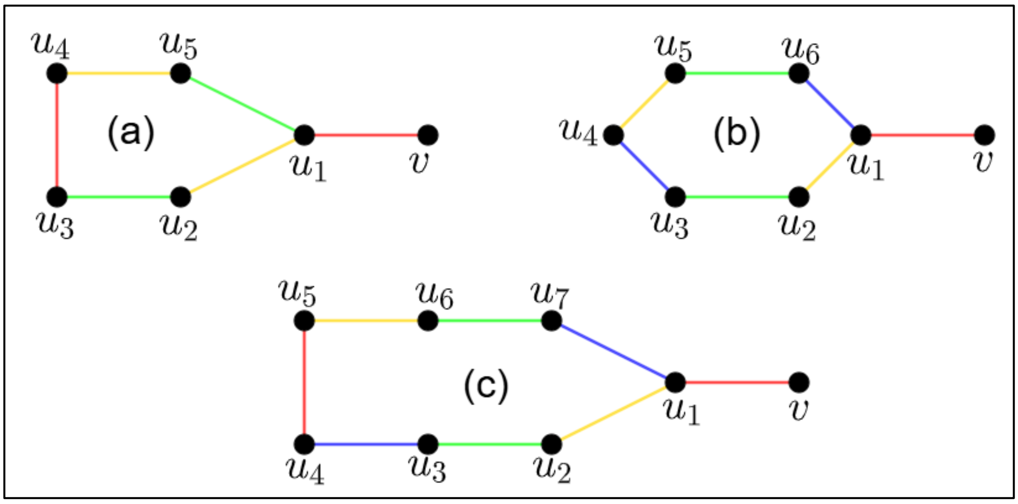
Klaim 1: Untuk setiap dua titik $x, y \in V(C_n)$, terdapat lintasan pelangi pada C_n yang menghubungkan x dan y dengan panjangnya kurang dari atau sama dengan $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Amalgamasi : Journal of Mathematics and Applications
Vol. 4, No. 1, May, 2025
ISSN: 2830-3695

Ambil busur terpendek pada C_n yang menghubungkan x dan y panjangnya kurang dari atau sama dengan $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$. Karena skema warna di atas memberikan warna yang berbeda pada sisi-sisi yang berurutan sepanjang busur terpendek (warna "naik" atau "turun" tanpa pengulangan dalam $\{2, \ldots, \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 1\}$, busur tersebut adalah lintasan pelangi. Untuk kasus n ganjil, jika busur terpendek memuat satu-satunya sisi berwarna 1 pada siklus C_n, ambil busur terpendek yang lain (panjangnya juga kurang dari atau sama dengan $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$) sehingga semua warnanya berbeda dan $\neq$ 1. Klaim terbukti.

Klaim 2: Untuk setiap $y \in V(C_n)$, terdapat lintasan pelangi dari v ke y dengan panjang kurang dari atau sama dengan $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 1$.

Ambil busur terpendek P pada C_n dari u_1 ke y (panjangnya kurang dari atau sama dengan $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$). Jika n ganjil dan P memuat sisi berwarna 1 pada siklus C_n, pilih busur terpendek yang lain agar semua warna pada P berada dalam $\left\{2, \ldots, \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 1\right\}$. Dengan demikian, lintasan $v - u_1$ (berwarna 1) yang disambung dengan P menghasilkan lintasan dari v ke y yang seluruh sisinya berwarna berbeda. Panjang lintasan ini kurang dari atau sama dengan $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 1$. Klaim terbukti.
Dari klaim 1 dan klaim 2 diperoleh setiap dua titik di P_n selalu dihubungkan oleh lintasan yang sisi-sisinya diberi warna berbeda. Oleh karena itu, $rc(P_n) = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 1$. ■
Gambar 2 mengilustrasikan pewarnaan pelangi pada beberapa graf pan.



Gambar 2. Suatu pewarnaan pelangi lokasi pada (a) Graf P_5, (b) Graf P_6, dan (c) Graf P_7

D. Simpulan

Misalkan n merupakan bilangan asli dengan $n \geq 3$. Jika P_n *merupakan graf pan berorde* $n + 1$*, maka*

$$rc(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

E. Daftar Pustaka

Chakraborty, S., Fischer, E., Matsliah, A., & Yuster, R. (2011). Hardness and algorithms for rainbow connection. *Journal of Combinatorial Optimization*, *21*(3), 330-347.

Chartrand, G., Johns, G. L., McKeon, K. A., & Zhang, P. (2008). Rainbow connection in graphs. *Mathematica bohemica*, *133*(1), 85-98.

Dafik, & Agustin, I. H. (2017). *Penerapan teknik rainbow connection dalam pengembangan delivery design system yang aman pada jaringan transportasi dan komunikasi (The application of rainbow connection technique in developing a secured delivery design system of transportation and communication network)*. Universitas Jember.

Dudek, A., Frieze, A. M., & Tsourakakis, C. E. (2015). Rainbow connection of random regular graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, *29*(4), 2255-2266.

Fitriani, D., & Salman, A. N. M. (2016). Rainbow connection number of amalgamation of some graphs. *AKCE International journal of graphs and combinatorics*, *13*(1), 90-99.

Kemnitz, A., & Schiermeyer, I. (2011). Graphs with rainbow connection number two. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, *31*(2), 313-320.